



Novo Modelo de Cinética Inversa para Cálculo da Reatividade sem Dependência do Histórico de Potência Nuclear Usando uma Equação Diferencial Não Linear

Viviane de Lima Noronha

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito necessário à obtenção do título de Doutor em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Aquilino Senra Martinez
Alessandro da Cruz Gonçalves

Rio de Janeiro
Dezembro de 2023

NOVO MODELO DE CINÉTICA INVERSA PARA CÁLCULO DA REATIVIDADE SEM
DEPENDÊNCIA DO HISTÓRICO DE POTÊNCIA NUCLEAR USANDO UMA EQUAÇÃO
DIFERENCIAL NÃO LINEAR

Viviane de Lima Noronha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA
DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Orientadores: Aquilino Senra Martinez
Alessandro da Cruz Gonçalves

Aprovada por:

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

Prof. Alessandro da Cruz Gonçalves, D.Sc.

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc.

Prof. Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2023

VIVIANE DE LIMA NORONHA

Novo Modelo de Cinética Inversa para Cálculo da
Reatividade sem Dependência do Histórico de Potência
Nuclear Usando uma Equação Diferencial Não Linear
[Rio de Janeiro] 2023.

Nº, XX p.: il.; 29,7 cm (UFRJ/ COPPE/D.Sc,
Engenharia Nuclear, 2019).

Orientadores: Aquilino Senra Martinez
Alessandro da Cruz Gonçalves
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE.

Referências Bibliográficas: p. XX-XX.

1. Cinética inversa

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado aos meus pais, irmãos e ao meu esposo Sidney Eduardo pelo apoio incondicional que me deram em todas as horas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora das Graças de todo o meu coração pela força, coragem, capacidade e esperança que me destes e que me fizeram mais forte e capaz para concluir este trabalho.

Agradeço aos meus orientadores Aquilino Senra Martinez e Alessandro da Cruz Gonçalves pelo trabalho eficaz, qualidade profissional, incansável paciência ao longo de todas as etapas até a conclusão do trabalho e por sempre acreditarem na conclusão deste trabalho. Graças a vocês concluímos satisfatoriamente.

Agradeço a todos os funcionários que trabalham no Programa de Engenharia Nuclear da COPPE pelo profissionalismo e amizade, em particular aos secretários Marco, Cássia e Reginaldo.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro fundamental a este trabalho.

Agradeço aos colegas e alunos do Programa de Engenharia Nuclear da COPPE pelo companheirismo, amizade e apoio para que pudesse chegar ao término deste trabalho. Ressalto os colegas Marcelo, Marcus, Maria Vitória, Willian e Edson pelo imensurável estímulo.

Agradeço aos meus pais, Vilson e Maria da Penha, aos meus irmãos, Geanine e Vitor e, ao meu esposo, Sidney Eduardo, pelo carinho, incentivo, imensa paciência e ajuda. Esta vitória é de todos vocês também.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

NOVO MODELO DE CINÉTICA INVERSA PARA CÁLCULO DA REATIVIDADE SEM DEPENDÊNCIA DO HISTÓRICO DE POTÊNCIA NUCLEAR USANDO UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL NÃO LINEAR

Viviane de Lima Noronha

Dezembro/2023

Orientadores: Aquilino Senra Martinez
Alessandro da Cruz Gonçalves

Programa: Engenharia Nuclear

O principal objetivo desta tese é a apresentação de uma nova formulação para a cinética pontual inversa, baseada em uma equação diferencial não linear de primeira ordem (EDONL), que calcula a reatividade em tempo real e que não depende do histórico de variação de potência nuclear. A Equação diferencial não linear é obtida por meio de um processo de integração por partes na integral oriunda da manipulação matemática na Equação da cinética inversa clássica e do uso da aproximação *prompt-jump*. A formulação proposta foi desenvolvida para um grupo de precursores de nêutrons e validada através de vários testes realizados. Os resultados do processo de validação demonstraram que a nova formulação proposta é bastante vantajosa em comparação com a formulação tradicional, uma vez o uso do histórico de potência nuclear tornou-se desnecessário, o que permite a retomada imediata do cálculo da reatividade em qualquer instante de tempo sem perda de precisão, mesmo em casos de interrupção do medidor de reatividade. Além disso, a formulação proposta forneceu resultados do cálculo da reatividade considerando passos de tempo variando de 0.1 seg a 2 seg, e sem a limitação da forma de variação de potência nuclear, favorecendo a mediação da reatividade em tempo real.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NEW INVERSE KINETICS MODEL FOR REACTIVITY CALCULATION WITHOUT DEPENDENCY ON NUCLEAR POWER HISTORY USING A NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Viviane de Lima Noronha

December/2023

Advisors: Aquilino Senra Martinez
Alessandro da Cruz Gonçalves

Department: Nuclear Engineering

XXX

Sumário

1. Introdução.....	15
1.1. Justificativa e Contribuição	17
1.2.Objetivos	20
1.2.1.Geral	20
1.2.2.Específicos	20
1.3.Organização do texto.....	20
2. Fundamentação Teórica	21
2.1.Formalismo da Cinética de Reatores.....	21
2.2.A influência dos nêutrons atrasados no controle do reator	21
2.3.Reatividade e criticidade	24
2.4.Obtenção das Equações da Cinética Pontual.....	25
2.5.Formulação da cinética pontual inversa clássica.....	28
3.Método Proposto	30
3.1.Equação Diferencial Não Linear para o Cálculo da Reatividade.....	30
3.2.Método Numérico	34
3.2.1.Aplicação do Método de Diferenças Finitas na Equação da cinética inversa clássica	34
3.2.2.Aplicação do Método de Diferenças Finitas na Equação Diferencial Não Linear.....	36
4. Resultados Numéricos e Discussões	38
4.1. Resultados da Aplicação para Diferentes Formas de Potência Nuclear.....	40
4.1.1. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 30 pcm$	40
4.1.2. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 40 pcm$	43
4.1.3. - Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 50 pcm$	46
4.1.4. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 60 pcm$	48
4.1.5. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 70 pcm$	51
4.1.6.Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 80 pcm$	53
4.1.7. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 90 pcm$	56
4.1.8.Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 100 pcm$	58

4.1.9. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 200 pcm$	61
4.2. Comparação dos Métodos Numéricos: Resultados Após a Interrupção da Medição da Reatividade.....	64
4.2.1. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 30 pcm$	64
4.2.2. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 40 pcm$	64
4.2.3. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 50 pcm$	65
4.2.4. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 60 pcm$	65
4.2.5. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 70 pcm$	66
4.2.6- Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 80 pcm$	66
4.2.7. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 90 pcm$	67
4.2.8- Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 100 pcm$	67
4.3- Análise dos resultados para diferentes valores de β : método de perturbação no parâmetro β	68
4.3.1. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 50 pcm$	68
5. Conclusão	71
6. Referências Bibliográficas	73

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1.1 - Utilização de um acelerador de prótons para a transmutação de elementos férteis em elementos físséis em um reator subcrítico ADS. Adaptado de Henrice Júnior, 2017.....	16
Figura 1.2 - Um reatímetro está operando quando é desligado inadvertidamente no instante t_d e é ligado novamente no t_1 , onde é necessário um intervalo de tempo Δh para realizar aquisições de potência nuclear para reiniciar o cálculo de reatividade.....	18
Figura 2.2 – A influência dos nêutrons atrasados na variação da potência nuclear (Scal, 2010).....	24
Figura 3.1 – Passo de tempo entre dois pontos consecutivos da potência nuclear.....	38
Figura 4.1 – Diagrama descrevendo o esquema de testes.....	38
Figura 4.2 – Erro, $\rho_{out}^{IPKE}(t)$ e $\rho_{out}^{EDONL}(t)$ com respeito à reatividade igual a 30 pcm, $\Delta t = 0.1$ seg.....	40
Figura 4.3 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 30 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	41
Figura 4.4 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 30 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	42
Figura 4.5 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 40 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	43
Figura 4.6 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 40 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	44
Figura 4.7 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 40 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	45
Figura 4.8 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 50 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	46
Figura 4.9 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 50 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	47
Figura 4.10 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 50 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	48
Figura 4.11 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 60 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	49
Figura 4.12 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 60 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	49
Figura 4.13 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 60 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	50
Figura 4.14 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 70 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	51

Figura 4.15 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 70 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	52
Figura 4.16 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 70 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	53
Figura 4.17 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 80 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	54
Figura 4.18 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 80 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	54
Figura 4.19 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 80 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	55
Figura 4.20 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 90 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	56
Figura 4.21 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 90 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	57
Figura 4.22 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 90 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	58
Figura 4.23 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 100 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	58
Figura 4.24 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 100 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	59
Figura 4.25 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 100 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	60
Figura 4.26 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 200 pcm, $\Delta t=0.1$ seg.....	61
Figura 4.27 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 200 pcm, $\Delta t=1$ seg.....	62
Figura 4.28 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 200 pcm, $\Delta t=2$ seg.....	63
Figura 4.29 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=30$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	64
Figura 4.30 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=40$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	64
Figura 4.31 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=50$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	65
Figura 4.32 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=60$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	65

Figura 4.33 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=70$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	66
Figura 4.34 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=80$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	66
Figura 4.35 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=90$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	67
Figura 4.36 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in}=100$ pcm e $\Delta t=0.1$ seg.....	67
Figura 4.37 – Erro pcm e ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para o caso $\Lambda = 2.10^{-5}seg$ $\rho_{in}=50$ pcm - $\Delta t=1$ seg, $\beta=0.00665$	68
Figura 4.38 – Erro pcm e ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para o caso $\Lambda = 2.10^{-5}seg$ $\rho_{in}=50$ pcm - $\Delta t=1$ seg, $\beta=0.00735$	69
Figura 4.39 – Erro pcm e ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para o caso $\Lambda = 2.10^{-5}seg$ $\rho_{in}=100$ pcm - $\Delta t=1$ seg, $\beta=0.00665$	69
Figura 4.40 – Erro pcm e ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para o caso $\Lambda = 2.10^{-5}seg$ $\rho_{in}=100$ pcm - $\Delta t=1$ seg, $\beta=0.00735$	70
Figura 4.41 – Erro pcm e ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para o caso $\Lambda = 2.10^{-5}seg$ $\rho_{in}=300$ pcm - $\Delta t=1$ seg, $\beta=0.00665$	70
Figura 4.42 – Erro pcm e ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} pra o caso $\Lambda = 2.10^{-5}seg$ $\rho_{in}=300$ pcm - $\Delta t=1$ seg, $\beta=0.00735$	71

LISTAS DE TABELAS

Tabela 4.1 –Valores dos parâmetros cinéticos para seis grupos de nêutrons atrasados.....	39
Tabela 4.2 – Valores dos parâmetros cinéticos para um grupo de nêutrons atrasados.....	39
Tabela 4.3 - Erro Absoluto (pcm), $\rho_{in} = 30 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$	40
Tabela 4.4 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=30 pcm$, $\Delta t = 1 seg$	41
Tabela 4.5 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=30 pcm$, $\Delta t = 2 seg$	42
Tabela 4.6 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=40 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$	43
Tabela 4.7 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=40 pcm$, $\Delta t = 1 seg$	44
Tabela 4.8 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=40 pcm$, $\Delta t = 2 seg$	45
Tabela 4.9 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=50 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$	46
Tabela 4.10 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=50 pcm$, $\Delta t = 1 seg$	47
Tabela 4.11 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=50 pcm$.Tabela 4.12 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=60 pcm$, $\Delta t = 2 seg$	48
Tabela 4.12 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=60 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$	48
Tabela 4.13 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=60 pcm$, $\Delta t = 1 seg$	49
Tabela 4.14 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=60 pcm$, $\Delta t = 2 seg$	50
Tabela 4.15 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=70 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$	51
Tabela 4.16 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=70 pcm$, $\Delta t = 1seg$	52
Tabela 4.17 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=70 pcm$, $\Delta t = 2 seg$	53
Tabela 4.18 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=80 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$	53
Tabela 4.19 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in}=80 pcm$, $\Delta t = 1 seg$	54

Tabela 4.20 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=80 \text{ pcm}$, $\Delta t = 2 \text{ seg}$	55
Tabela 4.21 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=90 \text{ pcm}$, $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$	56
Tabela 4.22 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=90 \text{ pcm}$, $\Delta t = 1 \text{ seg}$	57
Tabela 4.23 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=90 \text{ pcm}$, $\Delta t = 2 \text{ seg}$	58
Tabela 4.24 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=100 \text{ pcm}$, $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$	58
Tabela 4.25 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=100 \text{ pcm}$, $\Delta t = 1 \text{ seg}$	59
Tabela 4.26 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=100 \text{ pcm}$, $\Delta t = 2 \text{ seg}$	60
Tabela 4.27 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=200 \text{ pcm}$, $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$	61
Tabela 4.28 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=200 \text{ pcm}$, $\Delta t = 1 \text{ seg}$	62
Tabela 4.29 – Erro Absoluto (<i>pcm</i>) - $\rho_{in}=200 \text{ pcm}$, $\Delta t = 2 \text{ seg}$	63

1. Introdução

A reatividade é um dos parâmetros mais importante dependente do tempo, uma vez que influencia diretamente o controle e a programação operacional do reator nuclear. Entende-se a reatividade como sendo o percentual de afastamento da condição de criticalidade do fluxo de nêutrons de um reator nuclear (Díaz, 2007). Conseqüentemente, para controlar a reatividade é preciso controlar o comportamento temporal do fluxo de nêutrons, que pode prever as respostas temporárias de um reator nuclear. Assim, é possível, partindo do comportamento do fluxo de nêutrons, prever e analisar de forma viável as respostas temporárias de um reator nuclear.

Para testes físicos durante o processo de partida do reator nuclear, o monitoramento da reatividade a cada instante é necessário para a segurança dos sistemas de reatores nucleares (Nunes, 2015). No entanto, para os novos reatores híbridos ADS (*Accelerator Driven System*), o monitoramento da reatividade precisa ser constante ao longo de toda a sua operação, visto que ao contrário dos reatores convencionais, os ADS são operados em um estado subcrítico, o que significa que eles não podem sustentar uma reação em cadeia por conta própria, por isso necessitam de um acelerador de prótons para iniciar e controlar a taxa de fissão no núcleo dos ADS. É a operação subcrítica dos ADS que permite o ajuste da margem de reatividade, isto é, o aumento de reatividade para provocar a criticidade. Logo, devido à operação subcrítica nos reatores ADS, o monitoramento constante da reatividade torna-se imprescindível. Por oferecer uma maior segurança, a operação subcrítica é uma das vantagens dos ADS, que é uma importante aposta, em tempo médio, em relação às novas tecnologias de reatores (Hossain, 2015; Kadi e Sartori, 2016; <https://www.oecd-neo.org/ndd/reports/2002/3109/nea3109annexF.pdf>, 2002; Fernandes e Barbosa, 2022).

Na operação subcrítica dos reatores ADS ocorre à transmutação dos actínídeos de longa vida que consistem em resíduos nucleares, ou os combustíveis queimados previamente, cujo destino seriam repositórios finais (Revol e Kadi, 2001), da seguinte maneira: Um feixe de prótons com energia entre 0,5 – 5,0 GeV, oriundos de um acelerador de prótons de alta energia, é direcionado para o centro do núcleo subcrítico do reator, onde colidem em elementos pesados (actínídeos de longa vida) e produzem nêutrons (reações chamadas de *spallation*), Figura 1.1. O

acréscimo de reatividade para o alcance da criticidade se dá através do fluxo de nêutrons usado para iniciar e sustentar uma reação em cadeia de fissão, que transmuta os actínídeos de longa vida em radionuclídeos de vida mais curta. Os ADSs podem ser usados para transmutar uma variedade de actínídeos de longa vida, incluindo neptúnio (Np), amerício (Am) e cúrio (Cm). Esses resíduos são difíceis de armazenar e representam um risco para o meio ambiente. (Rubbia *et al.*, 1996; Henrice Júnior, 2017; Antolin, 2013). O projeto do reator ADS iniciou-se em 1998 pelo Centro de Pesquisas Nucleares da Bélgica (SCK - CEN) e está previsto para entrar em operação neste ano sendo um dos reatores híbridos com maior número de referências na literatura (Abderrahim *et al.*, 2005; Antolin, 2013).

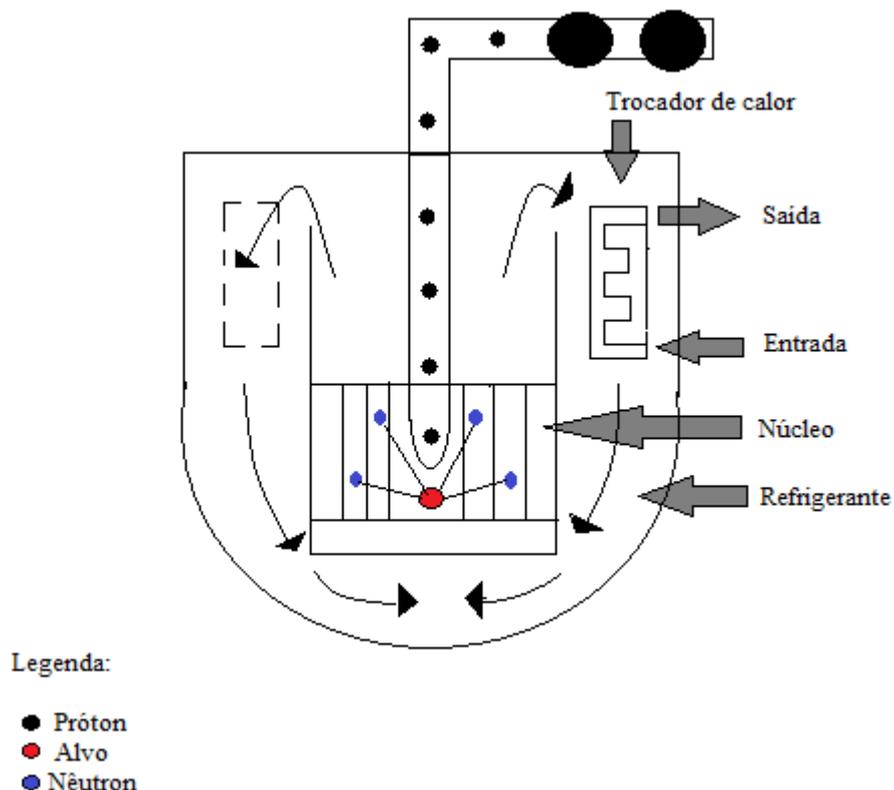


Figura 1.1 - Utilização de um acelerador de prótons para a transmutação de elementos férteis em elementos físséis em um reator subcrítico ADS. Adaptado de Henrice Júnior, 2017.

Torna-se, portanto, essencial à determinação da quantidade de reatividade necessária para permitir uma operação confiável e segura dos reatores nucleares convencionais ou híbridos, durante a vida útil do núcleo. A necessidade iminente de monitorar a reatividade para controlar o núcleo do reator nuclear impõe que modelos da cinética nuclear sejam frequentemente revistos e aprimorados (Suescun-Diaz *et al.*, 2016).

Para a medição da reatividade em tempo real são utilizados medidores digitais que

calculam a reatividade através da formulação da Equação da cinética inversa clássica, que descreve o comportamento da reatividade em função dos sinais captados por detectores de nêutrons, os quais monitoraram o fluxo dessas partículas (Suzuki e Tsunoda, 1964; Steffen, 1977; Moreira, 1986; Ansari, 1991). A formulação da cinética inversa clássica é a formulação mais difundida entre os medidores de reatividades digitais, pois favorece um monitoramento em tempo real da reatividade, aumentando a margem de segurança ao longo dos processos de criticalização, assim como durante os testes físicos.

Os primeiros medidores de reatividade eram baseados em tecnologia analógica (Suzuki e Tsunoda, 1964). No entanto, partindo da formulação clássica da cinética inversa, diversos medidores de reatividade foram desenvolvidos ao longo das últimas décadas. Nos anos noventa, surgiram os medidores baseados em tecnologia digital, que eram medidores de reatividade mais aprimorados e confiáveis, pois continham maior capacidade de processamento (Suescún *et al.*, 2007; Ansari, 1991; Shimazu *et al.*, 1994; Jahan *et al.*, 2011).

A formulação inversa da cinética pontual clássica é uma equação integro-diferencial dependente de um termo integral, conhecido como histórico de potência nuclear, que guarda o comportamento da potência nuclear. A equação integro-diferencial provém do sistema de equações da cinética pontual, formado por sete equações diferenciais ordinárias acopladas pelo termo de potência nuclear (Duderstadt e Hamilton, 1976). As Equações da cinética pontual clássica descrevem a evolução temporal da distribuição de nêutrons e da concentração de precursores de nêutrons atrasados no reator nuclear. Portanto, resolvendo este sistema de Equações pode-se obter a variação de potência nuclear e os efeitos da concentração de precursores de nêutrons atrasados no reator nuclear.

Uma desvantagem da Equação da cinética inversa clássica está na dependência do histórico de potência nuclear que, por exemplo, em situações em que há mau funcionamento do reatímetro, que é um medidor digital capaz de calcular a reatividade, ou até mesmo quando ele é iniciado, a referida equação não permite a recuperação ou o início imediato do medidor, gerando, com isso, um atraso na determinação acurada da reatividade em tempo real.

O objetivo desta tese é apresentar uma nova formulação para calcular a reatividade em tempo real, sem a necessidade do histórico de potência nuclear. Essa formulação é baseada em uma equação diferencial não linear de primeira ordem (EDONL).

1.1. Justificativa e Contribuição

Durante a operação do reatímetro, pode ocorrer perda de aquisição do sinal de potência nuclear ou alguma falha inesperada no cálculo da reatividade, forçando o *reset* do reatímetro. Falhas no reatímetro podem ocorrer por vários motivos durante a coleta de dados e o cálculo dos valores de reatividade do reator nuclear. Por exemplo, o sinal do reatímetro pode ser perdido ou uma falha eletrônica pode ocorrer repentinamente. Cada uma destas circunstâncias imprevistas fará com que o reatímetro perca o seu histórico de potência nuclear. Este problema precisa ser resolvido para que a reatividade continue sendo monitorada, o que é essencial para o controle do reator nuclear. Em geral, o intervalo de aquisição de dados para o histórico de potência é de um segundo, o que pode resultar na necessidade de realizar mais de 100 aquisições para reiniciar o cálculo da reatividade. Ademais, para que reatímetro funcione corretamente antes de ser iniciado, também é necessário uma aquisição de dados para o histórico de potência. Assim que o problema for resolvido, espera-se que o reatímetro retome o cálculo da reatividade.

Um exemplo, considere a situação de um reatímetro é iniciado e está em operação quando no instante t_d , ele é desligado inadvertidamente, e no instante t_1 , é ligado novamente. Será necessário um intervalo de tempo, Δh , para fazer aquisições de potência nuclear até calcular novamente o valor da reatividade. Esta situação é ilustrada na Figura 1.2.

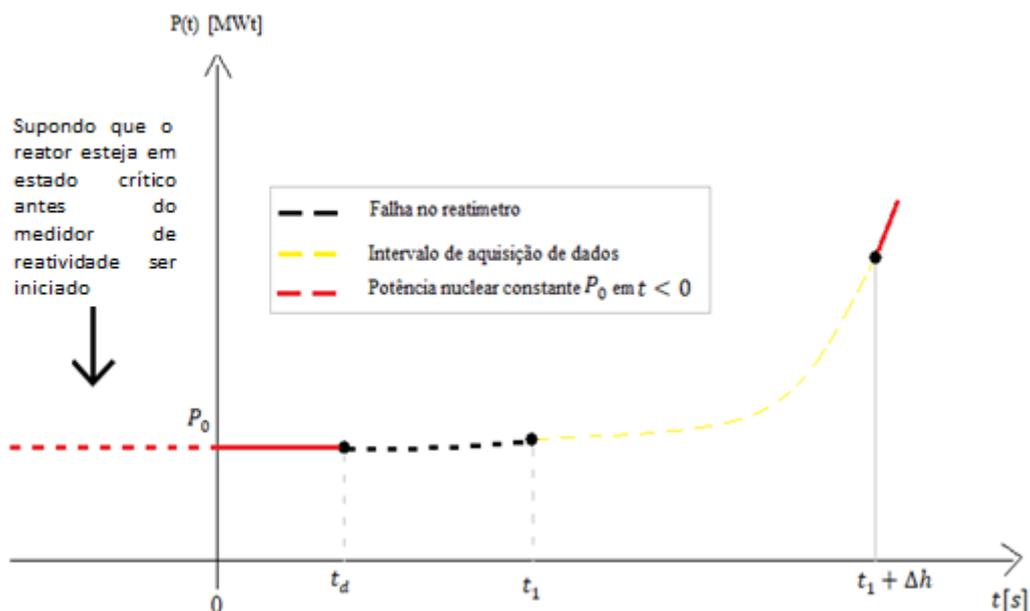


Figura 1.2 - Um reatímetro está operando quando é desligado inadvertidamente no instante t_d e é ligado novamente no t_1 , onde é necessário um intervalo de tempo Δh para realizar aquisições de potência nuclear para reiniciar o cálculo de reatividade.

A formulação clássica não permite a recuperação imediata do reatímetro, devido a presença do histórico de potência nuclear. Além disso, por causa do histórico de potência nuclear, também não é possível utilizar a formulação clássica também antes do reatímetro ser iniciado, uma vez que é preciso uma aquisição de dados de potência nuclear para que ele funcione adequadamente. Por isso a necessidade de métodos alternativos que calculem a reatividade sem a dependência do histórico de potência nuclear.

A literatura existente (Ansari, 1991; Kitano, 1999; Tamura, 2003; Shimazu, 2005; Palma *et al.*, 2016; Shimazu *et al.*, 2017; Zhang *et al.*, 2018; Zarei, 2022) tem como objetivo calcular a reatividade de maneira recursiva e contínua utilizando métodos baseados sobretudo na discretização do histórico de potência nuclear, que faz com que o novo valor da reatividade seja dependente dos valores antigos e atuais da potência nuclear. No entanto, métodos numéricos alternativos foram propostos recentemente e mostraram que existem outras possibilidades de fazer isto, só que de forma mais eficiente, nesse caso, sem a necessidade do histórico de potência nuclear, como os de Suescún *et al.* (2007), Díaz (2012), Malmir e Vosoughi (2013), Shimazu (2014); Suéscun-Díaz (2016), Zarei (2021).

Por exemplo, Suescún *et al.* (2007) elaboraram um método de cálculo da reatividade baseado em uma expressão numérica composta pela primeira e pela segunda derivadas da potência nuclear, e que determina a reatividade de forma contínua, mesmo no caso de interrupção do cálculo, para algumas formas de potência nuclear. Foi apresentada por Suéscun-Díaz (2012) uma formulação para diferentes formas de potência nuclear utilizando o método preditor-corretor de Hamming, que converge com diferentes passos de tempo; Malmir e Vosoughi (2013) propuseram um novo método de múltiplos passos para resolver o problema da cinética pontual inversa usando o método polinomial de Lagrange. As fórmulas de três e cinco pontos do método de Lagrange são usadas para cálculos de reatividade em tempo real e os resultados são comparados com soluções da literatura para diferentes formas de potência nuclear; a proposta de um método para estimativa da reatividade que tem a capacidade de filtragem de ruídos e que pode substituir o estimador baseado na formulação da cinética inversa clássica foi realizada por Shimazu (2014); Suéscun-Díaz (2016) elaboraram um método que se baseia numa generalização do método preditor-corretor de Adams- Bashforth- Moulton de 4ª ordem; uma estratégia de filtragem usando o preditor-corretor de Kalman foi desenvolvida para minimizar o atraso decorrente de um ruído gaussiano (Zarei, 2021).

Os trabalhos anteriores são considerados evoluções no que diz respeito ao cálculo da reatividade sem a necessidade do histórico de potência nuclear. A fim de agregar à essa temática, a presente tese apresenta uma nova formulação para calcular a reatividade em

tempo real por meio de uma Equação diferencial não linear de primeira ordem (EDONL) que não depende do histórico de potência nuclear.

O ineditismo e a relevância deste trabalho estão nos resultados para o cálculo da reatividade, que não necessitam de nenhum critério de imposição a respeito do perfil de potência nuclear juntamente com uma formulação mais simples que os métodos citados, justamente pelo fornecimento de resultados precisos para o cálculo contínuo da reatividade em tempo real mesmo escrita na forma colapsada de seis para um grupo de precursores.

1.2.Objetivos

1.2.1.Geral

Apresentar uma nova formulação da cinética inversa que representa adequadamente o comportamento da reatividade em tempo real, sem a necessidade do histórico de potência nuclear.

1.2.2.Específicos

- (1) Analisar a viabilidade da equação da cinética pontual inversa clássica em cálculos de reatividade em tempo real.
- (2) Obter uma nova formulação para calcular a reatividade de forma contínua e em tempo real, sem a necessidade do histórico de potência nuclear, baseada em uma equação diferencial não linear de primeira ordem (EDONL).
- (3) Comparar os resultados obtidos pela formulação proposta com os da formulação clássica, a fim de verificar se a nova formulação representa a reatividade de forma esperada.

1.3.Organização do texto

Esta tese é apresentada da seguinte maneira: seção 2 – é feita uma revisão bibliográfica sobre o formalismo da cinética de reatores, destacando o formalismo da cinética pontual inversa para o cálculo da reatividade. Na seção 3, a proposta da pesquisa, que é apresentar uma nova formulação para medição contínua e em tempo real da reatividade, oriunda de uma equação diferencial não linear de primeira ordem, é explicada em detalhes. Os resultados da formulação proposta para testes envolvendo diferentes formas de potência nuclear e a recuperação imediata da reatividade são comparados com os resultados apresentados pela formulação clássica e discutidos na seção 4. Na seção 5, chega-se à conclusão dos resultados. Por fim, na seção 6 são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento da tese.

2. Fundamentação Teórica

2.1. Formalismo da Cinética de Reatores

O desempenho da potência nuclear e as concentrações dos precursores de nêutrons atrasados no núcleo do reator podem ser caracterizados com boa precisão através do uso das equações da cinética pontual. Essas equações não dependem de uma fonte externa de nêutrons.

As equações que permitem descrever o comportamento da variação temporal da potência nuclear e da concentração de precursores no interior do reator nuclear são conhecidas como Equações da cinética pontual. Estas equações desempenham um papel fundamental no estudo das dinâmicas de um reator nuclear, uma vez que são baseadas em um modelo simples e eficaz, apesar das dificuldades associadas à obtenção dos parâmetros nucleares necessários. A partir desse modelo de cinética pontual, é possível obter uma resposta precisa sobre a evolução da potência nuclear ao longo do tempo, com exceção de situações particulares, como mudanças abruptas no fluxo de nêutrons (Scal, 2010).

Dado que as variações na potência nuclear estão diretamente ligadas às variações no fluxo de nêutrons, é possível representar a potência nuclear em relação a essas mudanças. Em resumo, a cinética pontual descreve a evolução temporal da população neutrônica. A população de nêutrons não é homogênea, podendo ser dividida em três grupos de acordo com sua origem, que podem ser diferenciados da seguinte forma (Baeten, 2006): Nêutrons prontos: grupo de nêutrons emitidos imediatamente após a fissão. Nêutrons atrasados: são nêutrons que também são produzidos na fissão, porém após certo tempo. Nêutrons oriundos de uma fonte: são os nêutrons que são gerados por uma fonte de nêutrons (Akcasu e Shotkin, 1971).

Ter um entendimento claro do comportamento do fluxo de nêutrons e da concentração dos precursores no núcleo do reator é de grande importância para a previsão das implicações de testes e acidentes que envolvem alterações no fator de multiplicação (Scal, 2010).

2.2.A influência dos nêutrons atrasados no controle do reator

Como a potência nuclear é diretamente proporcional ao fluxo de nêutrons, esta pode ser escrita em função da variação do número de nêutrons/população neutrônica (Duderstadt e Hamilton, 1976):

$$P(t) = \gamma \sum_f v N(t). \quad (2.1)$$

Sendo que a população de nêutrons pode ser escrita resolvendo a seguinte Equação

diferencial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{k-1}{l} N(t). \quad (2.2)$$

Onde,

$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{Energia média liberada na reação de fissão.}$

$v \stackrel{\text{def}}{=} \text{Velocidade média de cada nêutron.}$

$\Sigma_f \stackrel{\text{def}}{=} \text{Seção de choque macroscópica de fissão.}$

$N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Número de nêutrons em cada instante de tempo } t \text{ (fluxo de nêutrons).}$

$P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Potência nuclear no instante de tempo } t.$

$l \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tempo médio de vida dos nêutrons prontos.}$

$k \stackrel{\text{def}}{=} \text{fator de multiplicação, isto é, é a razão entre a produção e a perda de nêutrons.}$

Resolvendo a Equação (2.2) e substituindo o resultado em (2.1) obtém-se uma Equação para a potência nuclear:

$$P(t) = P_0 e^{\frac{k-1}{l} t}. \quad (2.3)$$

Os nêutrons prontos são emitidos após a fissão de um núcleo físsil no reator e em um tempo inferior a 10^{-14}s e com uma energia muito alta, da ordem de 1 MeV . Por esse motivo, são denominados nêutrons rápidos. Esses nêutrons são desacelerados por um processo chamado de moderação, até atingirem uma energia correspondente ao equilíbrio térmico do sistema, de aproximadamente 0.025 eV (Baeten, 2006).

Os nêutrons atrasados também são emitidos após a fissão do núcleo físsil, como mencionado, mas em uma fração menor quando comparado com os nêutrons rápidos. Eles surgem do decaimento radioativo de isótopos produzidos na fissão, também chamados de precursores, Duderstadt e Hamilton (1976). Na Figura 2.1 (Duderstadt e Hamilton, 1976) é mostrado o decaimento do Br^{87} , um exemplo clássico um exemplo do surgimento dos nêutrons atrasados no processo de fissão.

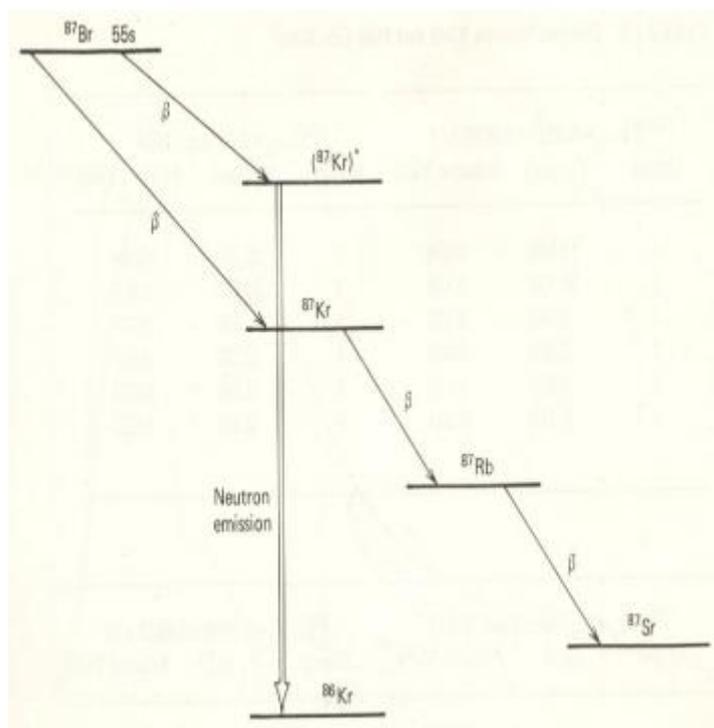


Figura 2.1 – Decaimento do Br^{87}

Na Figura 2.1, observa-se que a sequência de decaimento que leva a emissão de um nêutron atrasado inicia pela emissão de uma partícula beta do isótopo Br^{87} , o que o transforma em Kr^{87*} . Em seguida, ocorre a emissão de um nêutron o que faz com que o isótopo Kr^{87*} decaia para Kr^{87} .

Os nêutrons atrasados representam menos de 1% do número total de nêutrons no núcleo do reator, cerca de aproximadamente 0.7%. Mesmo com uma quantidade ínfima comparada com o número de nêutrons rápidos, a presença dos nêutrons atrasados aumenta consideravelmente a vida dos nêutrons no núcleo do reator. De tal forma que o tempo médio de vida dos nêutrons prontos, l , passa de 0.0001 segundos para 0.1 segundos, possibilitando que a população neutrônica no núcleo do reator seja efetivamente controlada (Duderstadt e Hamilton, 1976). Na Figura 2.2 (Scal, 2010) observa-se a influência e a importância dos nêutrons atrasados no controle do reator nuclear.

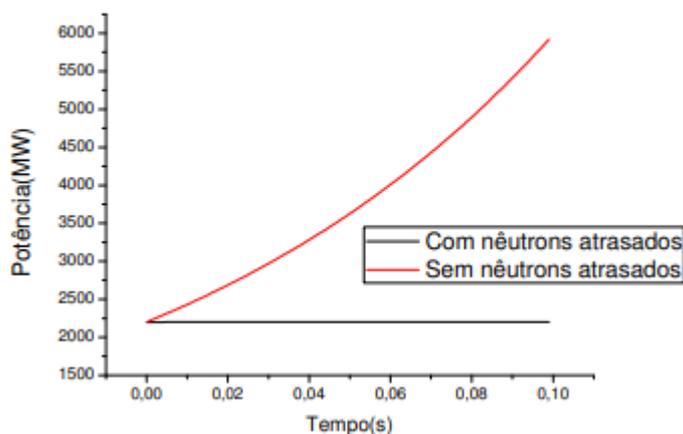


Figura 2.2 – A influência dos nêutrons atrasados na variação da potência nuclear (Scal, 2010).

2.3.Reatividade e criticidade

O fator de multiplicação efetivo, k , é a relação entre o total de nêutrons em uma geração (N_i) o de uma geração anterior (N_{i-1}), isto é,

$$k = \frac{N_i}{N_{i-1}}.$$

Sendo a reatividade a grandeza que representa o desvio de criticidade do reator, definida por,

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k-1}{k}.$$

Tem-se a seguinte relação envolvendo a reatividade, o fator de multiplicação, os precursores de nêutrons e o número de nêutrons: (1) Quando $k < 1$, então $\rho < 0$: O reator é subcrítico, isto é, ocorre uma redução do número de nêutrons no reator. (2) Quando $k = 1$, então $\rho = 0$: O reator é crítico, ou seja, a população de nêutrons no reator é constante. (3) Quando $k > 1$, então $\rho > 0$: O reator é supercrítico, o que significa que ocorre um aumento na população de nêutrons. Para assegurar o controle do reator é preciso que a população de nêutrons se mantenha constante de geração em geração.

Existem várias técnicas para a determinação da reatividade. Tais técnicas dividem-se em Estática, dinâmica e cinética. Na técnica estática, a variação de reatividade é calculada a partir de uma potência nuclear constante; na técnica dinâmica, a reatividade é obtida através de outros parâmetros, como os períodos estáveis assintóticos da Equação “*inhour*”; a técnica cinética é a usada na formulação proposta neste trabalho e calcula a reatividade de forma contínua e em

tempo real, partindo da variação da potência nuclear e baseando-se na Equação da cinética pontual inversa clássica (Díaz, 2007).

2.4.Obtenção das Equações da Cinética Pontual

Considerando os efeitos dos nêutrons atrasados, pode-se escrever o modelo de difusão de nêutrons que descreve o comportamento temporal da população neutrônica levando em conta uma mesma velocidade para todos os nêutrons. No entanto, esse modelo pode ser simplificado ao considerar que o fluxo espacial não se altera ao longo do tempo. Adotando essa suposição, pode-se descartar a dependência espacial do modelo de difusão a uma mesma velocidade tornando-o descrito apenas por Equações diferenciais ordinárias acopladas e variantes no tempo. Esse modelo gerado é conhecido como *modelo da cinética pontual* e sua obtenção será detalhada nessa seção. A simplificação em questão torna a implementação do modelo de difusão menos detalhista, conforme observado por (Ferreira, 2021Fer).

As Equações de difusão de nêutrons a uma mesma velocidade podem ser expressadas da seguinte forma:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) + \sum_a \varphi(\vec{r}, t) = S_f(\vec{r}, t). \quad (2.4)$$

Onde, D é o coeficiente de difusão de nêutrons; $\varphi(\vec{r}, t)$ é o fluxo de nêutrons e \sum_a é a seção de choque macroscópica de absorção. A segunda Equação do modelo de difusão expressa $S_f(\vec{r}, t)$, que é o termo de fonte de fissão, como sendo:

$$S_f(\vec{r}, t) = (1 - \beta) v \sum_f \varphi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\vec{r}, t). \quad (2.5)$$

Onde,

$$\frac{\partial C_i(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \beta_i v \sum_f \varphi(\vec{r}, t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.6)$$

Substituindo as Equações (2.5) em (2.4), obtém-se

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) + \sum_a \varphi(\vec{r}, t) = (1 - \beta) v \sum_f \varphi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\vec{r}, t). \quad (2.7)$$

Admitindo que a concentração de precursores de nêutrons e o fluxo de nêutrons possam ser escritos como funções separáveis tanto no tempo quanto no espaço, pode-se considerar:

$$\varphi(\vec{r}, t) = vN(t)\psi(\vec{r}), \quad (2.8)$$

$$C_i(\vec{r}, t) = C_i(t) \psi(\vec{r}). \quad (2.9)$$

E a Equação de *Helmholtz* (Bell e Glasstone, 1970):

$$\nabla\psi(\vec{r}) + B^2 \psi(\vec{r}) = 0.$$

Onde,

$$B_1^2 = B_g^2,$$

e

$$B_g^2 = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D}.$$

Sendo o B_g^2 *Buckling geométrico*. Substituindo as Equações (2.8) e (2.9) em (2.7), obtém-se:

$$v\frac{1}{v}\psi(\vec{r})\frac{dN(t)}{dt} - DvN(t)\nabla^2\psi(\vec{r}) + \Sigma_a vN(t)\psi(\vec{r}) = (1 - \beta)v\Sigma_f vN(t)\psi(\vec{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t)\psi(\vec{r}). \quad (2.10)$$

Dividindo a Equação (2.10) por $\psi(\vec{r})$:

$$\frac{dN(t)}{dt} - DvN(t)\frac{\nabla^2\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} + \Sigma_a vN(t) = (1 - \beta)v\Sigma_f vN(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (2.11)$$

e pela Equação de *Helmholtz* pode-se obter:

$$\frac{\nabla^2\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} = -B_g^2 \quad (2.12)$$

Substituindo a Equação (2.12) em (2.11):

$$\frac{dN(t)}{dt} - DvN(t)B_g^2 + \Sigma_a vN(t) = (1 - \beta)v\Sigma_f vN(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (2.13)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} + [DB_g^2 + \Sigma_a - (1 - \beta)v\Sigma_f]vN(t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (2.14)$$

Por definição tem-se

$$k_\infty = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma_a}, k = \frac{k_\infty}{(1+B_g^2L^2)}, L = \frac{D}{\Sigma_a}, l = [v\Sigma_a(1+B_g^2L^2)]^{-1}. \quad (2.15)$$

Sendo, k_∞ o fator de multiplicação infinito, k é fator de multiplicação efetivo, L é comprimento de difusão.

Substituindo as definições (2.15) em (2.14) obtém-se:

$$\frac{dN(t)}{dt} + \Sigma_a vN(t) [(1 + B_g^2L^2) - (1 - \beta)k(1 + B_g^2L^2)] = \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (2.16)$$

Ou,

Definindo o tempo médio de geração de nêutrons Λ :

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} l/k$$

Dividindo a Equação (2.17) por k e substituindo Λ no resultado, tem-se

$$\frac{dN(t)}{dt} + \left[\frac{1-k+\beta}{\Lambda} \right] N(t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (2.18)$$

Mas,

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k-1}{k}.$$

Então a Equação (2.18) resulta em:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\frac{\rho-\beta}{\Lambda} \right] N(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (2.19)$$

Realizando o mesmo desenvolvimento para a Equação (2.6), chega-se a:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} \psi(\vec{r}) = -\lambda_i C_i(t) \psi(\vec{r}) + \beta_i v \sum_f v N(t) \psi(\vec{r}), i = 1, \dots, 6. \quad (2.20)$$

Dividindo a Equação (2.20) por $\psi(\vec{r})$:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \beta_i v \sum_f v N(t), i = 1, \dots, 6. \quad (2.21)$$

Das definições em (2.15) pode-se obter,

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{k}{l} = \frac{k_{\infty}}{(1+B_g^2 L^2)} v \Sigma_a (1 + B_g^2 L^2) = \frac{v \Sigma_f}{1+B_g^2 L^2} v \Sigma_a (1 + B_g^2 L^2) = v \Sigma_f v. \quad (2.22)$$

Que substituindo (2.22) em (2.21) chega-se a:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = -\lambda_i C_i(t) + \frac{\beta_i}{\Lambda} N(t), i = 1, \dots, 6. \quad (2.23)$$

As Equações (2.24) constituem o modelo da cinética pontual para seis grupos de precursores de nêutrons:

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \left[\frac{\rho - \beta}{\Lambda} \right] N(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \\ \frac{dC_i(t)}{dt} &= \frac{\beta_i}{\Lambda} N(t) - \lambda_i C_i(t), i = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Esse conjunto de Equações descreve a dependência temporal da população de nêutrons e da concentração de precursores, respectivamente, sem fonte externa de nêutrons. A validade dessas Equações é garantida, pois tais Equações podem ser obtidas a partir de uma forma mais geral, que é a Equação de transporte de nêutrons, sem necessariamente admitir as suposições realizadas no processo.

2.5. Formulação da cinética pontual inversa clássica

Uma vez que existe uma relação linear entre a população de nêutrons, o fluxo de nêutrons e a potência nuclear, em qualquer tempo, é possível relacionar $N(t)$ com a potência nuclear, $P(t)$. Substituindo $N(t)$ por $P(t)$ na equação (2.24), obtém-se o sistema de Equações da cinética pontual clássica, Equações (2.25) e (2.26), descrito para seis grupos de precursores e sem fonte externa de nêutrons. Por meio da solução deste sistema pode-se determinar a evolução temporal da potência nuclear e os efeitos da concentração de precursores de nêutrons atrasados no reator nuclear.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left[\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right] P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (2.25)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t), i = 1, \dots, 6. \quad (2.26)$$

Com as seguintes condições iniciais:

$$P(t = 0) = P_0, \quad (2.27)$$

$$C_i(t = 0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} P_0. \quad (2.28)$$

Onde,

$P(t)$ =Potência nuclear;

$\rho(t)$ = reatividade;

$C_i(t)$ = Concentração de i th grupo de precursores de nêutrons atrasados;

β_i = Fração efetiva de i th de nêutrons atrasados;

β = Fração efetiva total de nêutrons atrasados, onde, $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$;

Λ = Tempo médio de geração de nêutrons;

λ_i = Constante de decaimento de i th grupo de precursores de nêutrons atrasados.

As Equações (2.25) e (2.26), onde a Equação (2.26) é a mesma que a Equação (2.24), formam um conjunto de sete equações diferenciais ordinárias acopladas pelo termo de potência, que podem ser reduzidas a uma única equação integro-diferencial, dando origem à chamada formulação da cinética pontual inversa clássica que calcula a reatividade, $\rho(t)$, (Ansari, 1991):

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{\beta}{P(t)} \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\beta} e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt'. \quad (2.29)$$

Para tanto, obtém-se a solução da Equação (2.26) pelo método do fator integrante e considera-se que a concentração de precursores de nêutrons atrasados era nula bem antes da partida do reator, isto é,

$$C_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt'. \quad (2.30)$$

Em seguida, substituindo a Equação (2.30) na Equação (2.25) e isolando o resultado a fim de obter $\rho(t)$, chega-se na Equação (2.29), isto é, na formulação clássica da cinética inversa.

A Equação (2.29) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^6 \lambda_i \beta_i H_i(t).$$

Onde,

$$H_i(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt'. \quad (2.31)$$

A integral $H_i(t)$, Equação (2.31), é o histórico de potência nuclear.

De forma geral, a reatividade é em função do tempo, por esse motivo as Equações (2.25) e (2.26) se tornam não lineares, o que faz com que a resolução do conjunto composto pelas setes equações ordinárias não lineares e acopladas no tempo seja não trivial (Duderstadt e Hamilton, 1976).

Por fornecer um monitoramento em tempo real da reatividade, auxiliando na segurança ao longo dos processos de criticalidade, tal como, no decorrer dos testes físicos, a formulação da cinética pontual inversa, Equação (2.29), é o método mais utilizado pelos medidores de reatividades digitais para o cálculo contínuo da reatividade. No entanto, devido à sua dependência no termo do histórico de variação de potência nuclear, Equação (2.31), não é favorável a utilização da formulação da cinética pontual inversa em situações em que ocorre a interrupção no cálculo da reatividade, pois isso implicará em um tempo no qual o medidor de reatividade estará indisponível. E, tão pouco, antes do medidor ser iniciado, uma vez que é preciso uma aquisição de dados de potência nuclear para que ele possa funcionar.

Nesse caso, o medidor estará novamente disponível quando os dados da potência nuclear acumulados forem suficientes para que o cálculo da reatividade se torne mais uma vez acurado.

Sendo assim, mesmo provendo resultados precisos para o cálculo da reatividade, a formulação da cinética pontual inversa é limitada devido o termo do histórico de potência nuclear. Por esse motivo, será apresentada a seguir uma alternativa para calcular a reatividade sem a necessidade do histórico de potência nuclear.

3.Método Proposto

3.1.Equação Diferencial Não Linear para o Cálculo da Reatividade

Nesta seção é apresentada a nova formulação para o cálculo da reatividade em tempo real sem a dependência do histórico de potência nuclear. Esta formulação basea-se em uma equação diferencial não linear de primeira ordem que é obtida através de um processo de integração por partes e, em seguida, a aplicação da aproximação *prompt-jump*.

Começamos, primeiramente, resolvendo a Equação (2.25) pelo método do fator integrante, tal que:

$$\frac{dP(t)}{dt} - \left[\left(\frac{\rho(t)-\beta}{\Lambda} \right) P(t) \right] e^{-\int_0^t \frac{\rho(t')-\beta}{\Lambda} dt'} = \lambda C(t) e^{-\int_0^t \frac{\rho(t')-\beta}{\Lambda} dt'} . \quad (3.1)$$

Integrando a Equação (3.1) de 0 a t , obtém-se uma expressão integro-diferencial para a potência nuclear, dada por:

$$P(t) = \left[P(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t') e^{-\int_0^{t'} \frac{\rho(t'')-\beta}{\Lambda} dt''} dt' \right] e^{\int_0^t \frac{\rho(t')-\beta}{\Lambda} dt'} = P(0) \exp \left(\int_0^t \frac{\rho(t')-\beta}{\Lambda} d\tau \right) + \sum_{i=1}^6 \tilde{P}_i(t) \exp \left(\int_0^t \frac{\rho(t')-\beta}{\Lambda} d\tau \right) \quad (3.2)$$

Definindo a integral da Equação (3.2) como sendo,

$$\tilde{P}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \lambda_i C_i(t') e^{f(t')} dt', \quad (3.3)$$

onde,

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt', \quad (3.4)$$

deve-se então resolver a Equação (3.3), para obter a variação de potência nuclear $P(t)$.

Assim sendo, deriva-se Equação (3.4) em relação a t , tal que:

$$\frac{df(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda},$$

ou,

$$dt = \frac{\Lambda}{\beta - \rho(t)} df. \quad (3.5)$$

Substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.3) tem-se,

$$\tilde{P}_i(t) = \int_0^t \frac{\Lambda \lambda_i C_i(t')}{\beta - \rho(t')} e^{f(t')} df'. \quad (3.6)$$

Definindo novamente,

$$\tilde{P}_i^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Lambda \lambda_i C_i(t)}{\beta - \rho(t)}, \quad (3.7)$$

a Equação (3.6) pode também ser reescrita como sendo,

$$\tilde{P}_i(t) = \int_0^t \tilde{P}_i^0(t') e^{f(t')} df'. \quad (3.8)$$

Integrando a Equação (3.8) usando a técnica de integração por partes, tem-se que esta assume a seguinte forma:

$$\tilde{P}_i(t) = \tilde{P}_i^0(t) e^{f(t)} - \tilde{P}_i^0(0) e^{f(0)} - \int_0^t \tilde{P}_i^1(t') e^{f(t')} df'. \quad (3.9)$$

Definindo,

$$\tilde{P}_i^1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tilde{P}_i^0(t)}{df} = \Lambda \lambda_i \frac{d}{df} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right), \quad (3.10)$$

e

$$\tilde{P}_i^1(0) \equiv \frac{d\tilde{P}_i^0(0)}{df} = \Lambda \lambda_i \left. \frac{d}{df} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right) \right|_{t=0}. \quad (3.11)$$

Repetindo-se o mesmo processo sob a integral da Equação (3.9), tem-se que

$$\tilde{P}_i(t) \cong \tilde{P}_i^0(t) e^{f(t)} - \tilde{P}_i^1(t) e^{f(t)} - \tilde{P}_i^0(0) e^{f(0)} + \tilde{P}_i^1(0) e^{f(0)} \quad (3.12)$$

Onde,

$$e^{f(0)} = 1. \quad (3.13)$$

Mas,

$$\frac{d}{df} = \frac{dt}{df} \frac{d}{dt}. \quad (3.14)$$

Pela Equação (3.14), as Equações (3.10) e (3.11) resultam em:

$$\tilde{P}_i^1(t) = \frac{\Lambda^2 \lambda_i}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right), \quad (3.15)$$

e

$$\tilde{P}_i^1(0) = \frac{\Lambda^2 \lambda_i}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right) \Big|_{t=0}. \quad (3.16)$$

Reescrevendo a Equação (3.12) pelas Equações (3.15) e (3.16) e substituindo o resultado em (3.2), obtém-se a seguinte aproximação para a expressão da potência nuclear (Equação 3.17):

$$\tilde{P}_i(t) \cong \frac{\Lambda \lambda_i C_i(t)}{\beta - \rho(t)} e^{f(t)} - \frac{\Lambda^2 \lambda_i}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right) e^{f(t)} - \frac{\Lambda \lambda_i C_i(t)}{\beta - \rho(t)} e^{f(0)} + \frac{\Lambda^2 \lambda_i}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right) \Big|_{t=0} e^{f(0)},$$

$$P(t) \cong P(0) e^{\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'} + \sum_{i=1}^6 (\tilde{P}_i^0(t) e^{-\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'} \cdot e^{\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'} - \tilde{P}_i^1(t) e^{-\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'} \cdot e^{\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'} - \tilde{P}_i^0(0) \cdot e^{\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'} + \tilde{P}_i^1(0) \cdot e^{\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'}),$$

ou,

$$P(t) \cong \left\{ P(0) + \sum_{i=1}^6 \left(-\tilde{P}_i^0(0) + \tilde{P}_i^1(0) \right) \right\} e^{-f(t)} + \sum_{i=1}^6 \left(\tilde{P}_i^0(t) - \tilde{P}_i^1(t) \right). \quad (3.17)$$

A Equação (3.17) é uma expressão para a potência nuclear variando no tempo para 1 grupo de precursores e sem fonte externa de nêutrons; gerada a partir de um processo de integração por partes.

O primeiro termo da Equação (3.17) pode ser desprezado, pois a exponencial decai muito rapidamente quando a inserção de reatividade é abaixo do ponto crítico, isto é, quando $\rho(t) < \beta$. Assim, com essa condição, o primeiro termo do lado direito da Equação (3.17) decai rapidamente com o tempo, de modo que a potência nuclear pode ser aproximada para:

$$P(t) \approx \sum_{i=1}^6 \left(\tilde{P}_i^0(t) - \tilde{P}_i^1(t) \right) = \sum_{i=1}^6 \tilde{P}_i^0(t) - \sum_{i=1}^6 \tilde{P}_i^1(t). \quad (3.18)$$

Onde, por conveniência segue,

$$\tilde{P}_i^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Lambda \lambda_i C_i(t)}{\beta - \rho(t)},$$

e

$$\tilde{P}_i^1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{df} \left(\tilde{P}_i^0(t) \right) = \frac{\Lambda \lambda_i}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right) = \frac{\Lambda^2 \lambda_i}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right).$$

A Equação (3.18) pode ser simplificada usando-se apenas um grupo de precursores de nêutrons atrasados. Logo, podemos colapsar seis grupos em um único grupo, conforme proposto em (Duderstadt e Hamilton, 1976) usando-se uma constante de decaimento média, tal que:

$$\bar{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)^{-1} \text{ e, conseqüentemente, } C_i(t) = C(t). \quad (3.19)$$

O que resulta na seguinte expressão para a potência nuclear:

$$P(t) \approx \tilde{P}^0(t) - \tilde{P}^1(t). \quad (3.20)$$

Onde,

$$\sum_{i=1}^6 \tilde{P}_i^0(t) = \frac{\Lambda \bar{\lambda} C(t)}{\beta - \rho(t)} = \tilde{P}^0(t), \quad (3.21)$$

e

$$\sum_{i=1}^6 \tilde{P}_i^1(t) = \frac{\Lambda^2 \lambda_i}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{C_i(t)}{\beta - \rho(t)} \right) = \frac{\Lambda^2 \bar{\lambda}}{(\beta - \rho(t))^2} \left\{ \frac{dC(t)}{dt} + \frac{C(t)}{(\beta - \rho(t))} \frac{d\rho(t)}{dt} \right\} = \tilde{P}^1(t). \quad (3.22)$$

Ou,

$$P(t) \approx \frac{\Lambda \bar{\lambda} C(t)}{\beta - \rho(t)} - \frac{\Lambda^2 \bar{\lambda}}{(\beta - \rho(t))^2} \left\{ \frac{dC(t)}{dt} + \frac{C(t)}{(\beta - \rho(t))} \frac{d\rho(t)}{dt} \right\}. \quad (3.23)$$

De acordo com a Equação (3.23), quando $P(t) \approx \tilde{P}^0(t)$ ou $P(t) \approx \frac{\Lambda \bar{\lambda} C(t)}{\beta - \rho(t)}$, reproduz-se uma aproximação do sistema de equações da cinética pontual clássica, que é a formulação da cinética pontual inversa para o caso em que $\frac{dP(t)}{dt} = 0$. Logo, para $P(t) \approx \tilde{P}^0(t) - \tilde{P}^1(t)$, a formulação da cinética pontual inversa é aperfeiçoada.

Usando-se a Equação (3.23) e a Equação (2.24) ou (2.26) para 1 grupo de precursores, tem-se o sistema de equações modificadas da cinética pontual para um grupo de precursores:

$$\left\{ P(t) \approx \frac{\Lambda \bar{\lambda} C(t)}{\beta - \rho(t)} - \frac{\Lambda^2 \bar{\lambda}}{(\beta - \rho(t))^2} \left\{ \frac{dC(t)}{dt} + \frac{C(t)}{(\beta - \rho(t))} \frac{d\rho(t)}{dt} \right\} \right\}, \quad (3.24)$$

$$\left\{ \frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} P(t) - \bar{\lambda} C(t). \right\} \quad (3.25)$$

Isolando $C(t)$ na Equação (3.25), substituindo o resultado na Equação (3.24) e, em seguida, multiplicando o novo resultado por $(\beta - \rho(t))$, elimina-se a dependência em $C(t)$ da Equação (3.24), tal que,

$$\left[\rho(t) - \frac{\Lambda \beta}{(\beta - \rho(t))^2} \frac{d\rho(t)}{dt} \right] P(t) - \Lambda \frac{dC(t)}{dt} - \left[1 - \frac{1}{\bar{\lambda}(\beta - \rho(t))} \right] \frac{\lambda}{(\beta - \rho(t))} \Lambda^2 \frac{dC(t)}{dt} = 0. \quad (3.26)$$

Considerando-se a seguinte aproximação:

$$\Lambda^2 \frac{dC(t)}{dt} \cong 0, \quad (3.27)$$

visto que em reatores térmicos é observado a condição $\Lambda \ll 1$, pois geralmente em problemas de cinética pontual é considerado $\Lambda \cong 1 \times 10^{-5}$ para reatores térmicos, conforme observado em

Duderstadt e Hamilton (1976) e Ott (1985), pode-se então desprezar o termo Λ^2 da Equação (3.26):

$$\left[\rho(t) - \frac{\Lambda\beta}{(\beta-\rho(t))^2} \frac{d\rho(t)}{dt} \right] P(t) - \Lambda \frac{dC(t)}{dt} = 0. \quad (3.28)$$

A aproximação *Prompt-Jump* clássica, $P(t) \approx \frac{\Lambda\bar{\lambda}C(t)}{\beta-\rho(t)}$, nos fornece uma aproximação para $\frac{dC(t)}{dt}$, tal que

$$\frac{dC(t)}{dt} \approx - \frac{1}{\Lambda\bar{\lambda}} \frac{d\rho(t)}{dt} P(t) + \frac{(\beta - \rho(t))}{\Lambda\bar{\lambda}} \frac{dP(t)}{dt}. \quad (3.29)$$

A Equação (3.29) fornece uma aproximação para $\frac{dC(t)}{dt}$ que pode ser usada na Equação (3.28) para eliminar o termo $dC(t)/dt$, resultando numa Equação diferencial não linear para o cálculo da $\rho(t)$ proposta neste trabalho,

$$(\rho(t) - \beta) \frac{dP(t)}{dt} + \left[\left(1 - \frac{\Lambda\bar{\lambda}\beta}{(\beta-\rho(t))^2} \right) \frac{d\rho(t)}{dt} + \bar{\lambda}\rho(t) \right] P(t) = 0. \quad (3.30)$$

A formulação proposta será vista na próxima seção e é baseada na Equação diferencial não linear para $\rho(t)$, Equação (3.30). A formulação proposta favorece o monitoramento contínuo da reatividade, uma vez que elimina a necessidade de um histórico de potência nuclear, de modo que caso haja interrupção do cálculo da reatividade, o mesmo pode ser retomado em tempo real sem perda de precisão.

3.2.Método Numérico

Nessa seção é apresentada a formulação proposta para o cálculo da reatividade baseada no uso da EDONL, Equação (3.30). Para tanto, é aplicado na Equação (3.30) o método de Diferenças Finitas. É feita a mesma aplicação na Equação da cinética pontual inversa clássica, Equação (2.29), considerando um grupo de precursores, para que as formulações clássica e proposta possam ser comparadas e analisadas posteriormente através de resultados de testes realizados no capítulo 4.

3.2.1.Aplicação do Método de Diferenças Finitas na Equação da cinética inversa clássica

A aplicação do método de diferenças finitas na Equação cinética pontual inversa clássica, Equação (2.29), para um grupo de precursores, inicia-se com a discretização do termo do histórico de potência nuclear, Equação (2.31), como será visto a seguir.

O método de diferenças finitas é um método de discretização onde a derivada de uma função é aproximada pelo coeficiente angular da corda secante (Gonçalves, 2006). Para tornar à aplicação do método de diferenças finitas mais próxima da linguagem computacional, são discretizados a variação de potência nuclear e a variação de reatividade:

$$\begin{cases} \left. \frac{dP(t)}{dt} \right|_{t=t_j} \cong \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx \frac{P^{t+j} - P^j}{\Delta t} \\ \left. \frac{d\rho(t)}{dt} \right|_{t=t_j} \cong \frac{\rho(t+\Delta t) - \rho(t)}{\Delta t} \approx \frac{\rho^{t+j} - \rho^j}{\Delta t} \end{cases} \quad (3.31)$$

Aplicando as Equações (3.31) nos termos potência nuclear e reatividade tem-se,

$$\begin{aligned} P(t_j) &\equiv P(t), \\ P^j &\equiv P(t_j), \\ P(t_j + \Delta t) &\equiv P(t + \Delta t) \\ P^{t+j} &\equiv P(t_j + \Delta t), \\ \rho(t_j) &\equiv \rho(t), \\ \rho^j &\equiv \rho(t_j), \\ \rho(t_j + \Delta t) &\equiv \rho(t + \Delta t), \\ \rho^{t+j} &\equiv \rho(t_j + \Delta t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tomando as Equações (3.32), pode-se obter a expressão discretizada para o histórico de potência nuclear, Equação (2.31), considerando um grupo de precursores. Logo, discretizando o

$$H(t) = \int_{-\infty}^t P(t') e^{-\bar{\lambda}(t-t')} dt',$$

tem-se a partir das Equações (3.32):

$$H(t_j) \equiv H(t),$$

$$H(t_j + \Delta t) \equiv H(t + \Delta t).$$

e,

$$H(t_j) = e^{-\bar{\lambda}t_j} \left[\int_{-\infty}^0 P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j + \int_0^{t_j} P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j \right]. \quad (3.33)$$

Para um tempo consecutivo $t_j + \Delta t$, tem-se

$$H(t_j + \Delta t) = e^{-\bar{\lambda}(t_j + \Delta t)} \left[\int_{-\infty}^0 P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j + \int_0^{t_j + \Delta t} P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j \right]. \quad (3.34)$$

Ou,

$$H(t_j + \Delta t) = e^{-\bar{\lambda}\Delta t} \left(e^{-\bar{\lambda}t_j} \left[\int_{-\infty}^0 P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j + \int_0^{t_j} P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j \right] + e^{-\bar{\lambda}t_j} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t} P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j \right). \quad (3.35)$$

Substituindo a Equação (3.34) na Equação (3.35) tem-se:

$$H(t_j + \Delta t) = e^{-\bar{\lambda}\Delta t} \left(H(t_j) + e^{-\bar{\lambda}t_j} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t} P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j \right). \quad (3.36)$$

Em associação com o método de integração por trapézios segue que,

$$\int_{t_j}^{t_j+\Delta t} P(t'_j) e^{\bar{\lambda}t'_j} dt'_j \approx \frac{\Delta t}{2} [P(t_j) e^{\bar{\lambda}t_j} + P(t_j + \Delta t) e^{\bar{\lambda}(t_j+\Delta t)}]. \quad (3.37)$$

E, substituindo a Equação (3.37) em (3.36):

$$H(t_j + \Delta t) = H(t_j) e^{-\bar{\lambda}\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} [P(t_j) e^{-\bar{\lambda}\Delta t} + P(t_j + \Delta t)]. \quad (3.38)$$

Mas, também pelas Equações (3.32) pode-se ter,

$$H^j \equiv H(t_j),$$

$$H^{j+1} \equiv H(t_j + \Delta t). \quad (3.39)$$

Substituindo as Equações (3.39) em (3.38), tem-se

$$H^{j+1} = H^j e^{-\bar{\lambda}\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} e^{\bar{\lambda}\Delta t} [P^j e^{-\bar{\lambda}\Delta t} + P^{j+1}]. \quad (3.40)$$

A Equação (3.40) é a expressão discretizada para o histórico de potência nuclear. Logo, a Equação (3.41) se torna a Equação discretizada para a Equação inversa da cinética clássica para um grupo de precursores. Esta é a Equação utilizada pelo reatímetro para a medida da reatividade.

$$\rho^{j+1} \cong \beta + \frac{\Lambda}{P^j} \left(\frac{P^{j+1} - P^j}{\Delta t} \right) - \frac{\bar{\lambda}\beta}{P^j} H^{j+1}, \quad (3.41)$$

onde, a condição inicial é dada por:

$$H_j^0 = \int_{-\infty}^0 e^{\bar{\lambda}t} P(t) dt = \frac{P^0}{\bar{\lambda}}.$$

A maioria dos medidores de reatividade em uso utiliza a Equação (3.41) para cálculo da reatividade. No entanto, devido ao termo referente ao histórico de potência nuclear, a Equação (3.41) necessita de uma aquisição de dados referentes à potência nuclear para um cálculo preciso da reatividade. Isso acaba se tornando uma forte restrição ao cálculo da reatividade usando-se a formulação clássica.

3.2.2. Aplicação do Método de Diferenças Finitas na Equação Diferencial Não Linear

É fundamental para a solução acurada das Equações diferenciais ordinárias não lineares, como a Equação (3.30), a utilização de métodos numéricos. Discretizando a Equação (3.30) através do método de diferenças finitas, obtemos a formulação proposta neste trabalho para o cálculo da reatividade, e que é independente de histórico de variação de potência nuclear, ou seja, um método totalmente capaz de realizar o monitoramento contínuo da reatividade, permitindo a retomada imediata dos cálculos após o desligamento, sem prejuízo de tempo e precisão. A Formulação proposta para o cálculo da reatividade é desenvolvida a seguir.

Dividindo a Equação (3.30) por $P(t)$ e, em seguida, substituindo as Equações (3.31) e (3.32) no resultado e, dividindo-o por $(\rho^j - \beta)$, tem-se

$$-\frac{1}{P^j} \left(\frac{P^{j+1} - P^j}{\Delta t} \right) + \frac{1}{(\beta - \rho^j)} \left[\left(1 - \frac{\Lambda \bar{\lambda} \beta}{(\beta - \rho^j)^2} \right) \left(\frac{\rho^{j+1} - \rho^j}{\Delta t} \right) + \bar{\lambda} \rho^j \right] \approx 0. \quad (3.42)$$

Onde é definindo,

$$I \equiv -\frac{1}{P^j} \left(\frac{P^{j+1} - P^j}{\Delta t} \right), \quad (3.43)$$

e,

$$II \equiv \frac{1}{(\beta - \rho^j)} \left[\left(1 - \frac{\Lambda \bar{\lambda} \beta}{(\beta - \rho^j)^2} \right) \left(\frac{\rho^{j+1} - \rho^j}{\Delta t} \right) + \bar{\lambda} \rho^j \right]. \quad (3.44)$$

Multiplicando a parte II da Equação (3.42) por $(\beta - \rho^j)^3$, tem-se para a Equação (3.42),

$$\frac{\rho^{j+1}(\beta - \rho^j)^2 - (\beta - \rho^j)^2 \rho^j}{\Delta t} - \frac{\Lambda \bar{\lambda} \beta \rho^{j+1}}{\Delta t} + \frac{\Lambda \bar{\lambda} \beta \rho^j}{\Delta t} + (\beta - \rho^j)^2 \bar{\lambda} \rho^j. \quad (3.45)$$

Ou,

$$\frac{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta](\rho^{j+1})}{\Delta t} - \frac{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta]}{\Delta t} \rho^j + (\beta - \rho^j)^2 \bar{\lambda} \rho^j. \quad (3.46)$$

Substituindo a Equação (3.46) na Equação (3.42), dividindo o resultado por $\frac{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta]}{\Delta t}$

e isolando ρ^{j+1} segue,

$$\rho^{j+1} = \frac{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta]}{\Delta t} \frac{\Delta t \rho^j}{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta]} - \frac{(\beta - \rho^j)^2 \bar{\lambda} \Delta t \rho^j}{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta]} + \frac{(\beta - \rho^j)^3}{P^j} \left(\frac{P^{j+1} - P^j}{\Delta t} \right) \left(\frac{\Delta t}{(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta} \right).$$

Ou,

$$\rho^{j+1} = \rho^j - \frac{(\beta - \rho^j)^2 \bar{\lambda} \Delta t}{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta]} \rho^j + \frac{(\beta - \rho^j)^3 \Delta t}{[(\beta - \rho^j)^2 - \Lambda \bar{\lambda} \beta]} \frac{1}{P^j} \left(\frac{P^{j+1} - P^j}{\Delta t} \right) \quad (3.47)$$

A Equação (3.47) é a formulação proposta (EDONL), onde Δt é o passo de tempo (intervalo temporal) entre dois pontos consecutivos da potência nuclear, conforme ilustrado pela Figura 3.1.

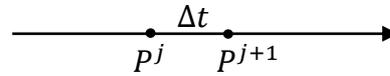


Figura 3.1 – Passo de tempo entre dois pontos consecutivos da potência nuclear.

4. Resultados Numéricos e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos para o cálculo da reatividade obtidos pela formulação proposta neste trabalho e pela formulação da cinética pontual inversa, que é dependente do histórico de variação de potência nuclear. Em todas as simulações foram consideradas diferentes formas de potência nuclear geradas por inserções de reatividade externa usadas como entrada, ρ_{in} . Para tanto, utilizamos o conjunto de equações da cinética pontual clássica, equações (2.25) e (2.26), para simular um conjunto de dados referentes a potência nuclear gerados por uma inserção de reatividade externa, ρ_{in} . Depois disso, os dados sobre a potência nuclear são usados como entradas na formulação proposta da cinética pontual inversa, EDONL, Equação (3.47), e na formulação da cinética pontual inversa clássica, IPKE, Equação (3.41), para determinar a variação de reatividade, ρ_{out} , que é comparada com a reatividade externa de entrada, ρ_{in} , como mostra a Figura 4.1.

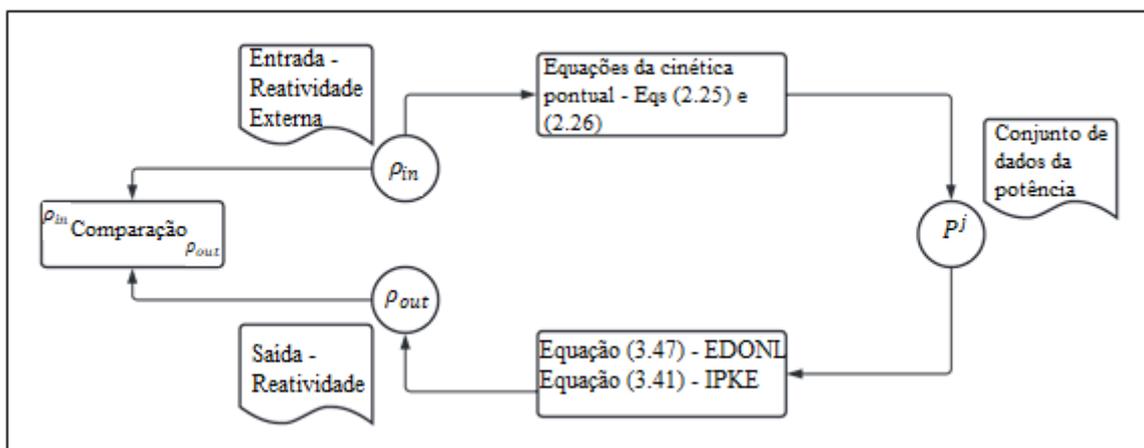


Figura 4.1 – Diagrama descrevendo o esquema de testes.

Os resultados foram obtidos usando as formulação proposta da cinética pontual inversa, EDONL, Equação (3.47) e a formulação da cinética pontual inversa clássica, EDONL, Equação

(3.41), com o auxílio do *Python 3.8*.

A análise dos resultados foi realizada com o intuito de mostrar a capacidade da formulação proposta em gerar resultados tão ou mais precisos que os da formulação clássica, conforme a metodologia da pesquisa descrita na seção 3. As condições iniciais para a potência nuclear, para a concentração de precursores de nêutrons atrasados e para a reatividade são, respectivamente,

$$P(0) = P_0 = 0 \text{ MW}$$

$$C(0) = C_0 = \frac{\rho}{\Lambda\lambda} P_0$$

$$\rho(0) = \rho_0 = 0 \text{ pcm}$$

Os valores adotados para os parâmetros cinéticos para seis grupos de precursores encontram-se distribuídos na Tabela 4.1 e podem ser obtidos na literatura (Duderstadt e Hamilton, 2010). As Equações (3.47) e (3.41) podem ser colapsadas de seis para um grupo de precursores, assim, por simplificação, adotamos nos testes realizados apenas um grupo de precursores e, portanto, os valores para os parâmetros cinéticos da Tabela 4.2.

Tabela 4.1 – Valores dos parâmetros cinéticos para seis grupos de nêutrons atrasados.

PARÂMETROS CINÉTICOS β_i	VALORES λ_i [seg ⁻¹]
β_1	0.000266
β_2	0.001491
β_3	0.001316
β_4	0.002849
β_5	0.000896
β_6	0.000182
λ_1	0.01270
λ_2	0.0317
λ_3	0.1150
λ_4	0.3110
λ_5	1.40
λ_6	3.870

Tabela 4.2 – Valores dos parâmetros cinéticos para um grupo de nêutrons atrasados

PARÂMETROS CINÉTICOS	VALORES
-------------------------	---------

β	0.0075
$\bar{\lambda}$	0.00784 s ⁻¹
Λ	0.00002s

4.1. Resultados da Aplicação para Diferentes Formas de Potência Nuclear

Nas figuras e nas tabelas a seguir são apresentados os desvios absolutos da reatividade em pcm pela formulação da cinética pontual inversa clássica (Equação (3.41) - ρ_{out}^{IPKE}) e, pela formulação proposta, (Equação (3.47) - ρ_{out}^{EDONL}), em comparação com o valor de reatividade de entrada, ρ_{in} . Os testes realizados consideraram passos de tempo iguais a $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$, $\Delta t = 1 \text{ seg}$ e $\Delta t = 2 \text{ seg}$, e diferentes valores de reatividade de entrada tais como: $\rho_{in} = 30 \text{ pcm}$, $\rho_{in} = 40 \text{ pcm}$, $\rho_{in} = 50 \text{ pcm}$, e $\rho_{in} = 60 \text{ pcm}$, $\rho_{in} = 70 \text{ pcm}$, $\rho_{in} = 80 \text{ pcm}$, $\rho_{in} = 90 \text{ pcm}$, $\rho_{in} = 100 \text{ pcm}$, os quais geraram um conjunto de amostragem de dados da potência nuclear, P^j . formulação da cinética pontual inversa clássica

4.1.1. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 30 \text{ pcm}$

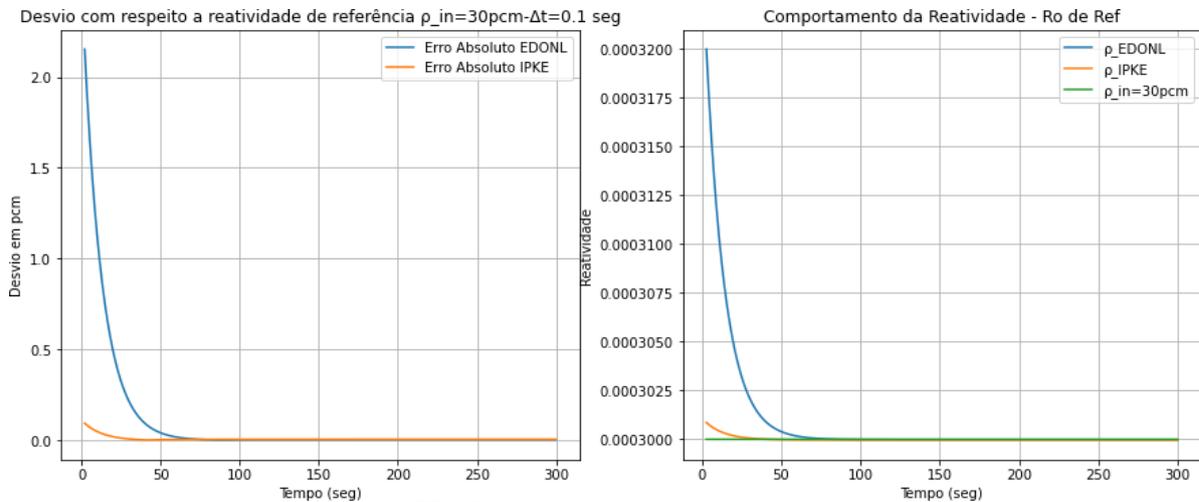


Figura 4.2 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade igual a 30 pcm, $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$.

Tabela 4.3 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 30 \text{ pcm}$.

$\Delta t = 0.1 \text{ seg}$.				
Tempo	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
Absolute Error				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL}(t) $	$\cong 2.3 \text{ pcm}$	$\cong 1.6 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE}(t) $	$\cong 0.09 \text{ pcm}$	$\cong 0.07 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$

Pela Figura 4.2 e a Tabela 4.3 são mostrados o comportamento temporal dos desvios absolutos obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 30 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos. E, também pela Figura 4.2 são apresentados o comportamento temporal da reatividade tanto para as formulações clássica, quanto para a proposta.

Analisando a Figura 4.2 e a Tabela 4.3 observa-se que o erro máximo ocorrido utilizando a formulação proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, foi de aproximadamente $2.3 pcm$ e, que após 70 segundos, a formulação proposta converge para o mesmo desvio da formulação clássica, de valor igual a $0.01 pcm$.

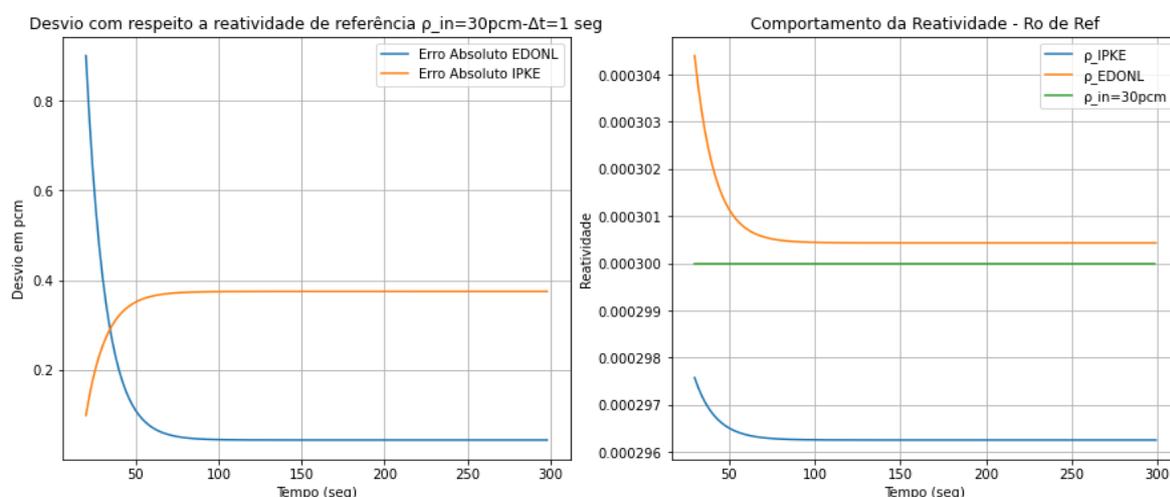


Figura 4.3 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a $30 pcm$, $\Delta t = 1 seg$.

Tabela 4.4 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 30 pcm$.

$\Delta t = 1 seg.$				
Erro Absoluto \ Tempo	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.04 pcm$	$\cong 0.04 pcm$	$\cong 0.04 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.26 pcm$	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.4 pcm$

Nas Figura 4.3 e Tabela 4.4 observa-se que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, obtém-se pela formulação proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, o desvio de $0.4 pcm$ em 30 segundos; enquanto que pela formulação clássica, o desvio máximo obtido é de $0.26 pcm$.

Após aproximadamente 40 segundos, usando-se a formulação clássica tem-se um aumento de aproximadamente de $0.14 pcm$ com respeito ao teste anterior, no entanto, a formulação proposta tem uma redução no desvio para $0.04 pcm$.

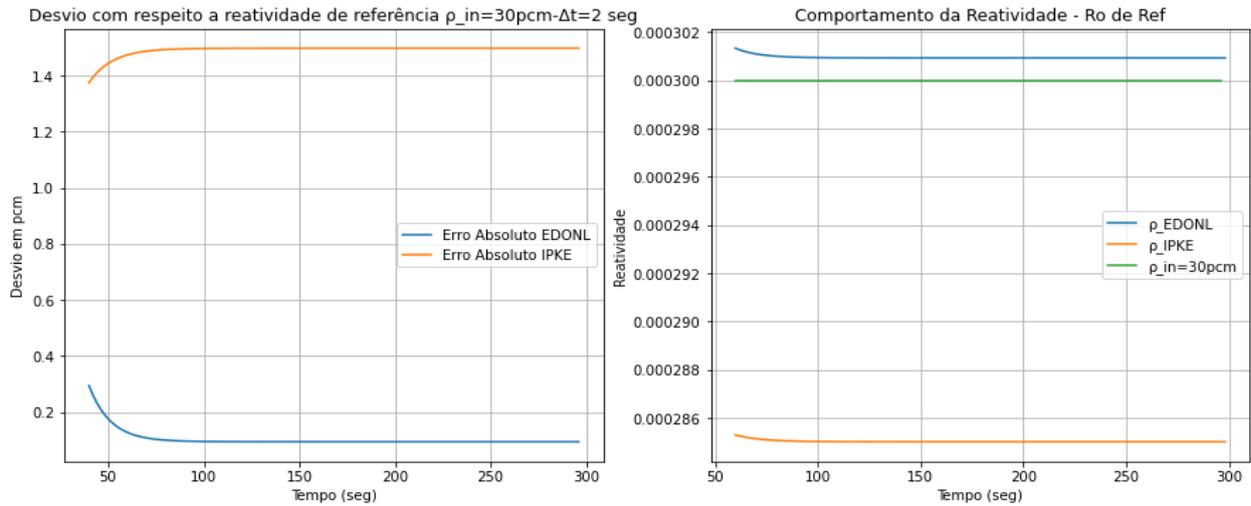


Figura 4.4 –Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 30 pcm, $\Delta t = 2\text{ seg}$.

Tabela 4.5 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 30\text{ pcm}$.

$\Delta t = 2\text{ seg}$.				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.3\text{ pcm}$	$\cong 0.09\text{ pcm}$	$\cong 0.09\text{ pcm}$	$\cong 0.09\text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.5\text{ pcm}$	$\cong 1.5\text{ pcm}$	$\cong 1.5\text{ pcm}$	$\cong 1.5\text{ pcm}$

Já nas Figura 4.4 e Tabela 4.5 observa-se que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos, tem-se por meio da formulação proposta, entre o intervalo de 0 a 300 segundos, o desvio máximo de 0.3 pcm; enquanto que pela formulação clássica, o desvio máximo obtido é de 1.5 pcm.

Após 60 segundos, pela formulação clássica não há aumento nem redução de reatividade com relação ao teste anterior. No entanto, pela formulação proposta, o desvio de reatividade passa a ser de 0.09 pcm.

4.1.2. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 40 pcm$

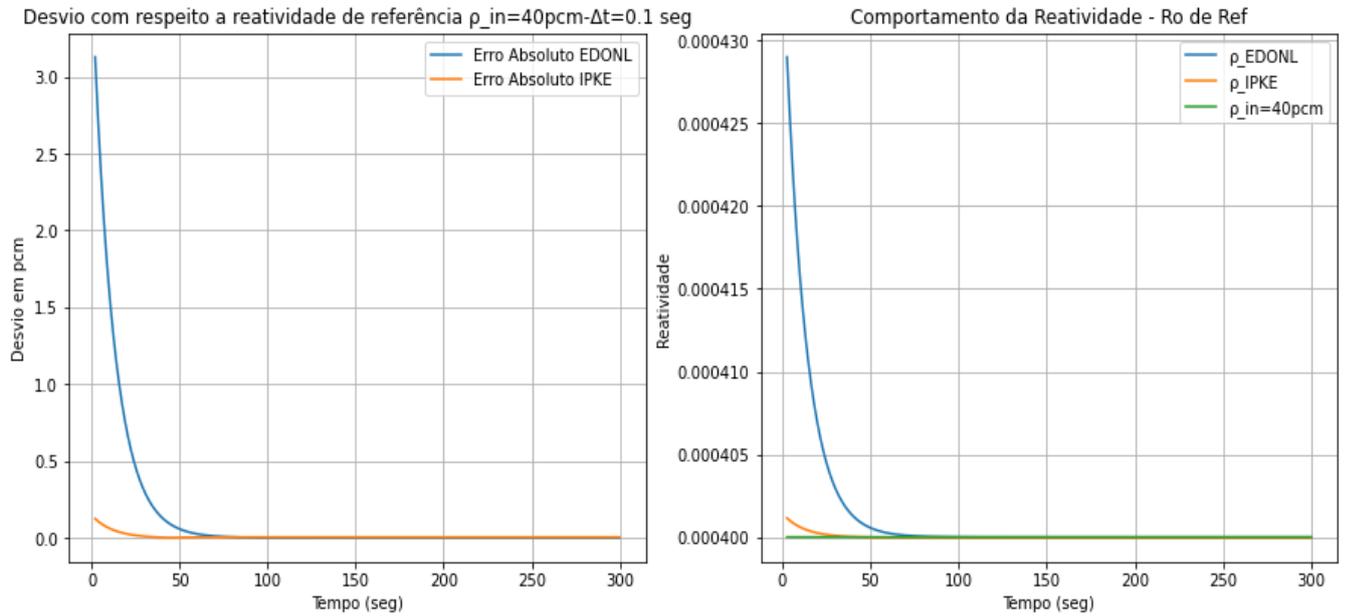


Figura 4.5 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a $40 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$.

Tabela 4.6 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 40 pcm$.
 $\Delta t = 0.1 seg$.

<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.7 pcm$	$\cong 0.1 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.1 pcm$	$\cong 0.08 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$

Na Figura 4.5 e na Tabela 4.6 são mostrados o comportamento temporal dos desvios absolutos obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 40 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos. Através da Figura 4.5 são apresentados o comportamento temporal da reatividade tanto para as formulações clássica, quanto para a proposta.

Analisando a Figura 4.5 e a Tabela 4.6 observa-se que o erro máximo ocorrido utilizando a formulação proposta, em 30 segundos, foi de $0.7 pcm$ e, que após 100 segundos, as duas formulações convergem para o mesmo desvio absoluto, de valor igual a $0.01 pcm$.

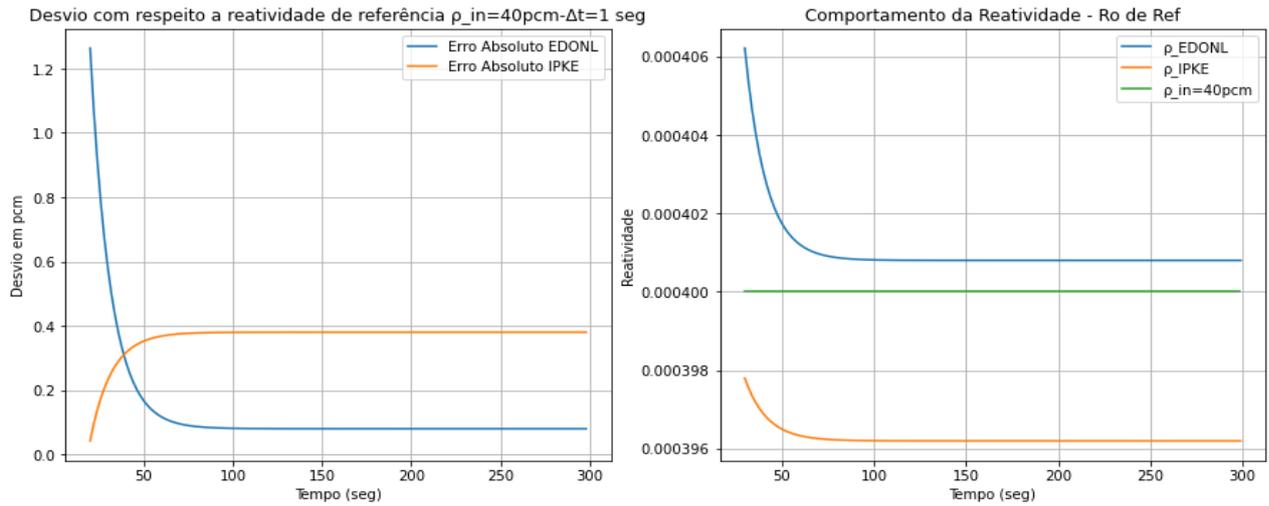


Figura 4.6 –Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 40 pcm, $\Delta t = 1 \text{ seg}$.

Tabela 4.7 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 40 \text{ pcm}$.

$\Delta t = 1 \text{ seg}$.				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.6 \text{ pcm}$	$\cong 0.1 \text{ pcm}$	$\cong 0.08 \text{ pcm}$	$\cong 0.08 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.2 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$

Nas Figura 4.6 e Tabela 4.7 é mostrado que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, obtém-se pela formulação proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, o desvio máximo de 0.6 pcm em 30 segundos; enquanto que pela formulação clássica, o desvio absoluto nesse mesmo tempo obtido foi de 0.2 pcm.

Após aproximadamente 100 segundos, usando-se a formulação clássica obtém-se um aumento de aproximadamente de 0.2 pcm com respeito ao teste anterior, porém, o desvio pela formulação proposta passou a ser o valor de 0.08 pcm ao longo do tempo.

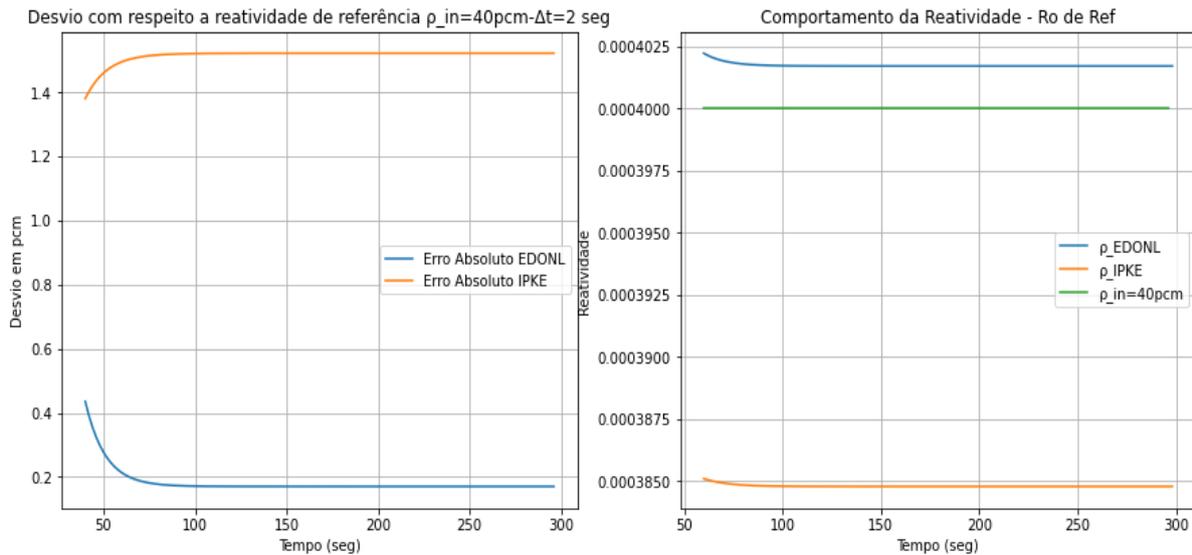


Figura 4.7 –Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 40 pcm, $\Delta t = 2\text{ seg}$.

Tabela 4.8 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 40\text{ pcm}$.

$\Delta t = 2\text{ seg}$.				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.4\text{pcm}$	$\cong 0.17\text{pcm}$	$\cong 0.17\text{pcm}$	$\cong 0.17\text{pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.4\text{pcm}$	$\cong 1.5\text{pcm}$	$\cong 1.5\text{pcm}$	$\cong 1.5\text{pcm}$

Na Figura 4.7 e na Tabela 4.8 observa-se que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos, tem-se por meio da formulação proposta, admitindo o mesmo intervalo das demais simulações, o desvio máximo de 0.4 pcm em 30 segundos; enquanto que pela formulação clássica, o desvio máximo obtido em 30 segundos é de 1.4 pcm.

Após 60 segundos, pela formulação clássica há aumento no desvio de 0.1 pcm com relação ao teste anterior. Já pela formulação proposta, o desvio de reatividade passa a ser de 0.17 pcm.

4.1.3. - Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 50 pcm$

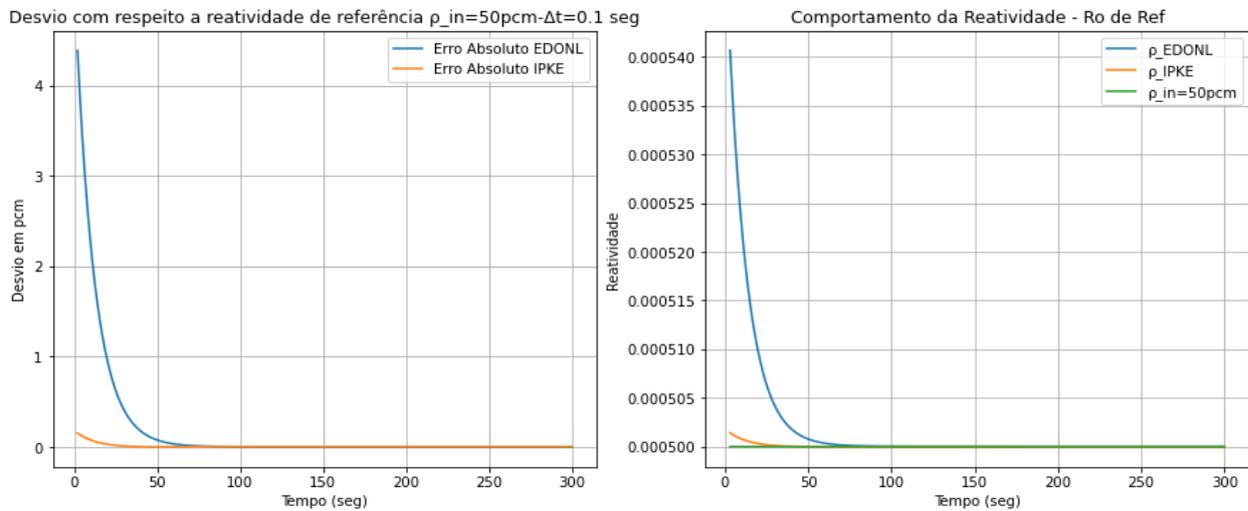


Figura 4.8 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a $50 pcm$, $\Delta t = 0.1 seg$.

Tabela 4.9 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 50 pcm$.

$\Delta t = 0.1 seg.$				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 4.5 pcm$	$\cong 3.1 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.1 pcm$	$\cong 0.1 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$

Nas Figura 4.8 e na Tabela 4.9 são apresentados o comportamento temporal dos erros obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 50 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos. Na Figura 4.8 é mostrado o comportamento temporal da reatividade para as formulações. Analisando a Figura e a Tabela, observa-se que o erro máximo ocorrido utilizando a formulação proposta foi próximo de $4.5 pcm$ e, que após 70 segundos, as duas formulações convergem para o mesmo desvio absoluto, de valor igual a $0.01 pcm$.

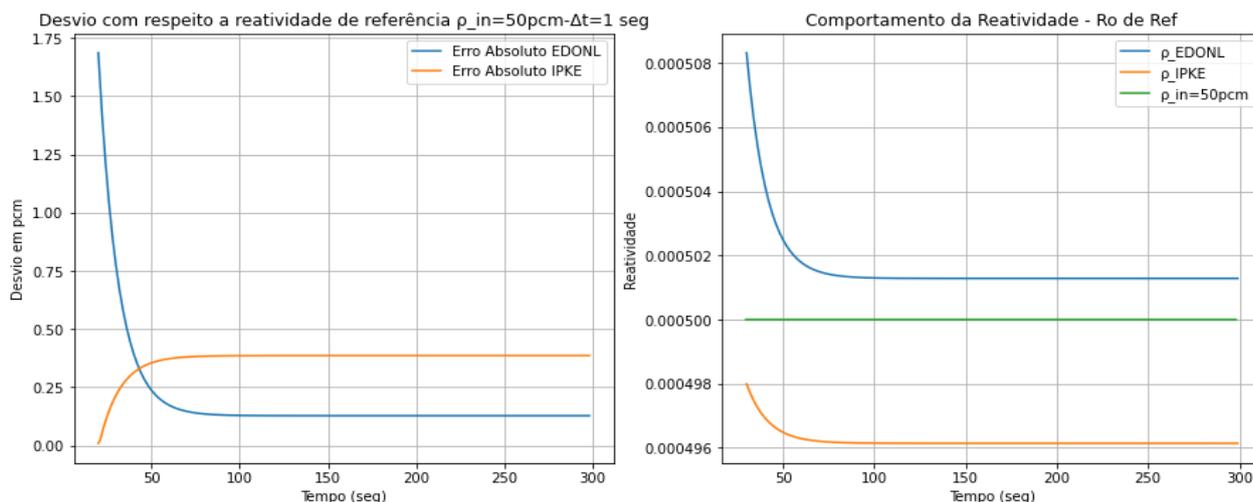


Figura 4.9 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 50 pcm, $\Delta t = 1 \text{ seg}$.

Tabela 4.10 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 50 \text{ pcm}$.

$\Delta t = 1 \text{ seg}$.				
Tempo \ Erro Absoluto	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.8 \text{ pcm}$	$\cong 0.2 \text{ pcm}$	$\cong 0.1 \text{ pcm}$	$\cong 0.1 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.2 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$

Pelas Figura 4.9 e Tabela 4.10 é mostrado que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, obtém-se pela formulação proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, o desvio de 0.8 pcm em 30 segundos; ao mesmo tempo que pela formulação clássica, o desvio foi de 0.2 pcm.

Depois de 60 segundos, usando-se a formulação clássica obtém-se um aumento de aproximadamente de 0.2 pcm com respeito ao teste anterior, outrora que, o desvio pela formulação proposta passou a ser no valor de 0.2 pcm.

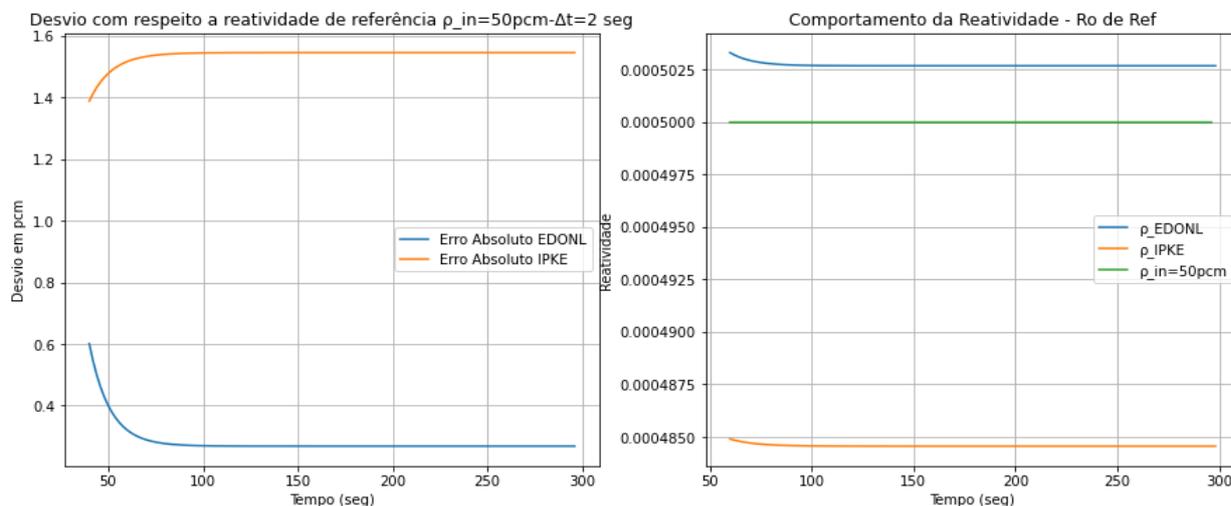


Figura 4.10 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 50 pcm, $\Delta t = 2 \text{ seg}$.

Tabela 4.11 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 50 \text{ pcm}$.

$\Delta t = 2 \text{ seg}$.				
Tempo	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
Erro Absoluto $ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.3 \text{ pcm}$	$\cong 0.27 \text{ pcm}$	$\cong 0.27 \text{ pcm}$	$\cong 0.27 \text{ pcm}$
Erro Absoluto $ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.5 \text{ pcm}$	$\cong 1.5 \text{ pcm}$	$\cong 1.5 \text{ pcm}$	$\cong 1.5 \text{ pcm}$

Na Figura 4.10 e na Tabela 4.11 é mostrado que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos, tem-se por meio da formulação proposta, admitindo o mesmo intervalo das demais simulações, o desvio máximo de 0.3 pcm em 30 segundos; enquanto que pela formulação clássica, o desvio máximo obtido em 30 segundos é de 1.5 pcm .

Após 60 segundos, pela formulação clássica não há alteração no desvio com relação ao teste anterior. Na formulação proposta o desvio de reatividade diminui passando a ser de 0.27 pcm .

4.1.4. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 60 \text{ pcm}$

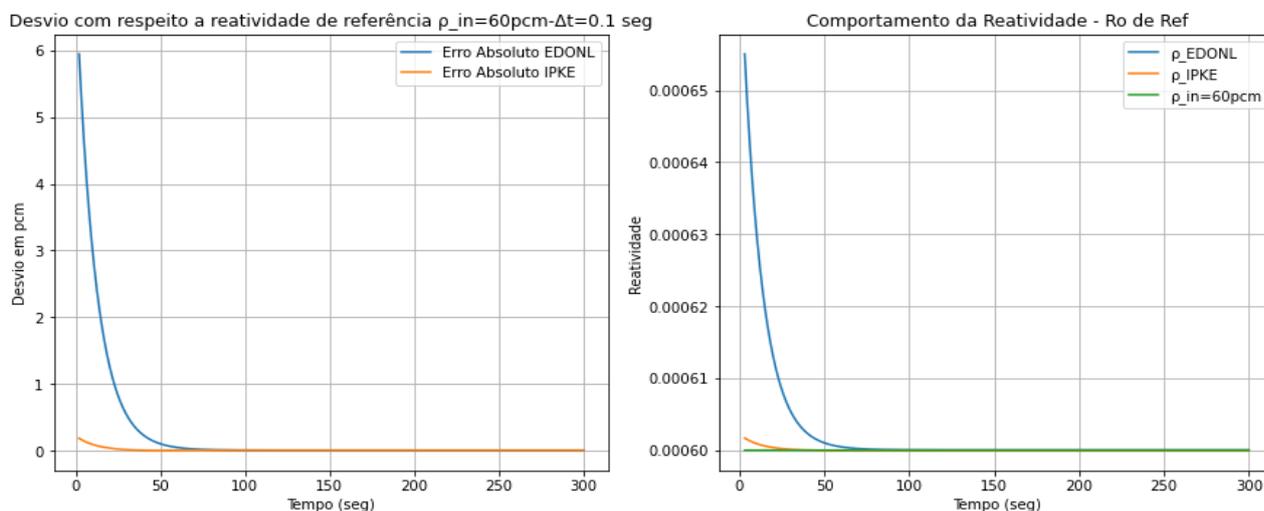


Figura 4.11 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 60 pcm, $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$.

Tabela 4.12 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 60 \text{ pcm}$.

$\Delta t = 0.1 \text{ seg}$.				
Tempo	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
Erro Absoluto $ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 5.5 \text{ pcm}$	$\cong 4.2 \text{ pcm}$	$\cong 0 \text{ pcm}$	$\cong 0 \text{ pcm}$

$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.17 pcm$	$\cong 0.13 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$
-----------------------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

Na Figura 4.11 e na Tabela 4.12 são apresentados o comportamento temporal dos desvios absolutos e da reatividade obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 60 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos.

Analisando a simulação e seus resultados observa-se que o desvio máximo ocorrido utilizando a formulação proposta foi de aproximadamente $0.6 pcm$ e, que depois 100 segundos, a formulação proposta converge para um desvio absoluto de aproximadamente $0.0 pcm$, enquanto à clássica, converge para $0.01 pcm$.

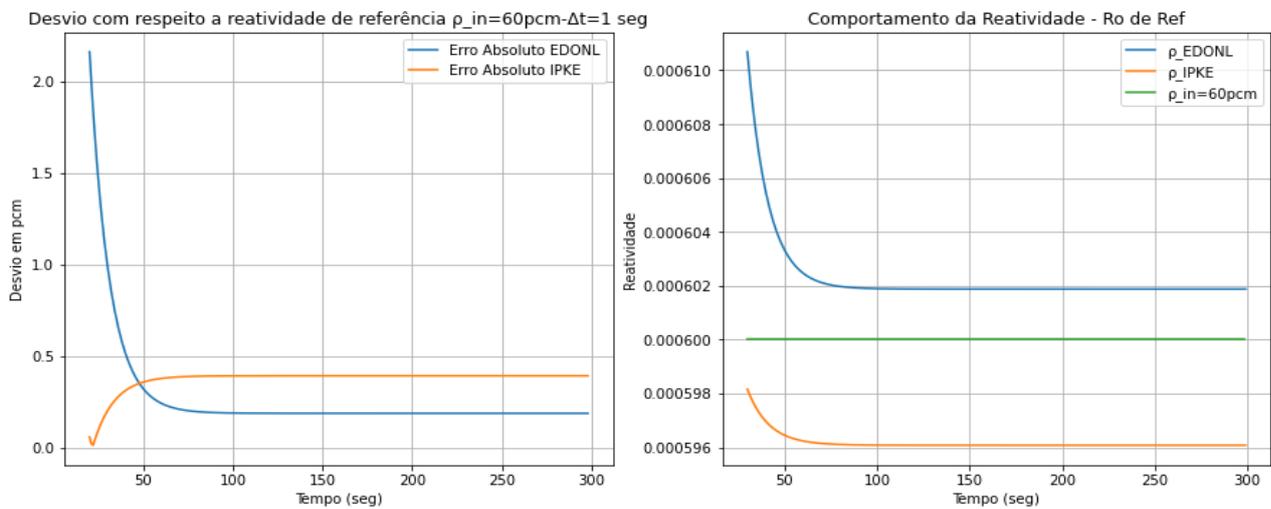


Figura 4.12 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a $60 pcm$, $\Delta t = 1 seg$.

Tabela 4.13 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 60 pcm$.

$\Delta t = 1 seg.$				
$\begin{matrix} \text{Tempo} \\ \text{Erro Absoluto} \end{matrix}$	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 1.0 pcm$	$\cong 0.2 pcm$	$\cong 0.19 pcm$	$\cong 0.19 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.18 pcm$	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.4 pcm$

Com um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, obtém-se pela formulação proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, o erro de $1.0 pcm$ em 30 segundos e, concomitantemente, pela formulação clássica, o desvio foi de $0.18 pcm$, de acordo com a Figura 4.12 e a Tabela 4.13.

O valor do erro, pelas formulações clássica e proposta, após 100 segundos, converge para respectivamente, $0.4 pcm$ e $0.19 pcm$.

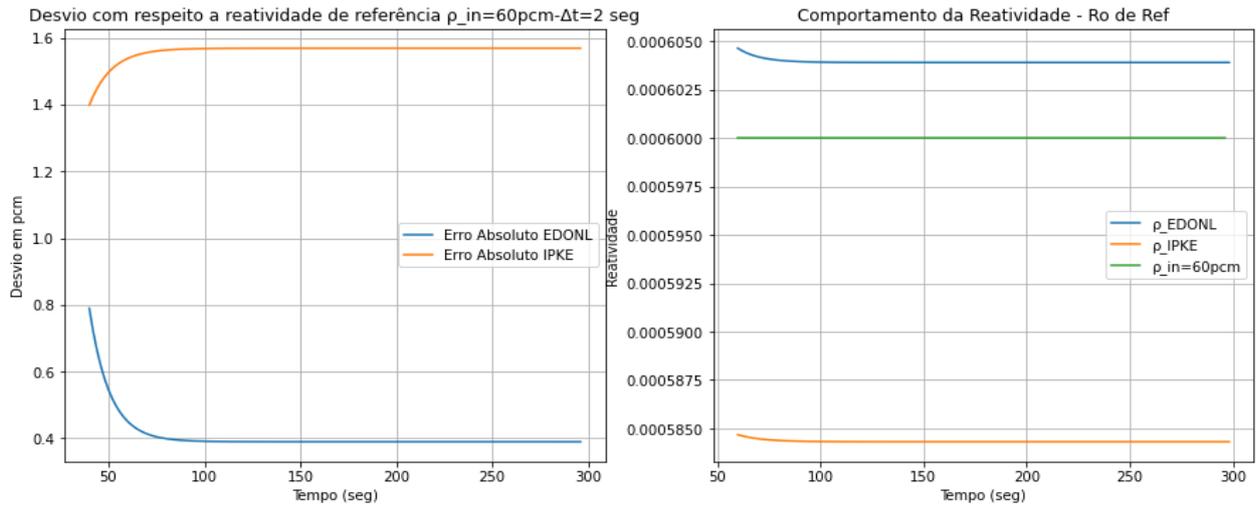


Figura 4.13 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 60 pcm, $\Delta t = 2 \text{ seg}$.

Tabela 4.14 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 60 \text{ pcm}$.

$\Delta t = 2 \text{ seg}$.				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.8 \text{ pcm}$	$\cong 0.39 \text{ pcm}$	$\cong 0.39 \text{ pcm}$	$\cong 0.39 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.4 \text{ pcm}$	$\cong 1.6 \text{ pcm}$	$\cong 1.6 \text{ pcm}$	$\cong 1.6 \text{ pcm}$

Com um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos e considerando o mesmo intervalo das simulações acima, tem-se pela formulação proposta, o desvio máximo de 0.8 pcm e, pela formulação clássica, o desvio máximo foi de 1.4 pcm, de acordo com a Figura 4.13 e a Tabela 4.14.

O valor do erro, pelas formulações clássica e proposta, após 60 segundos, converge para respectivamente, 1.6 pcm e 0.39 pcm.

4.1.5. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 70 pcm$

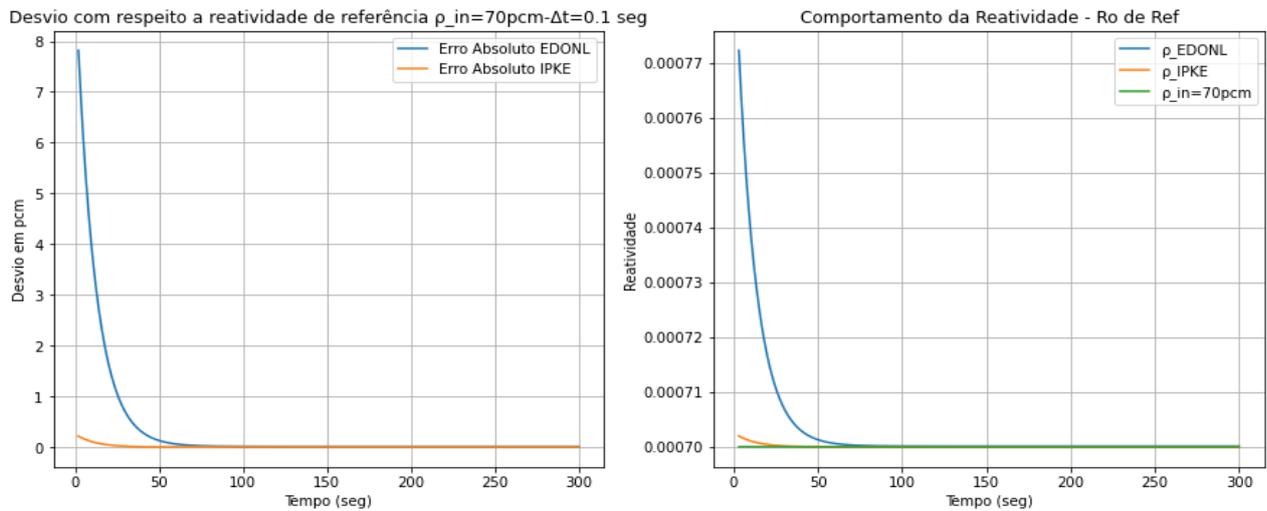


Figura 4.14 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 70 pcm, $\Delta t = 0.1 seg$.

Tabela 4.15 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 70 pcm$.

$\Delta t = 0.1 seg.$				
<i>Erro Absoluto</i> \ <i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 7.2 pcm$	$\cong 5.5 pcm$	$\cong 0 pcm$	$\cong 0 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.19 pcm$	$\cong 0.15 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$

Na Figura 4.14 e na Tabela 4.15 são apresentados o comportamento temporal dos desvios absolutos e da reatividade obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 70 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos.

Analisando o teste e seus resultados verifica-se que o erro ocorrido utilizando a formulação proposta foi de aproximadamente 8.0 pcm e, que após 100 segundos, a formulação proposta converge para um desvio absoluto de aproximadamente 0.0 pcm, enquanto à clássica, converge para 0.01 pcm.

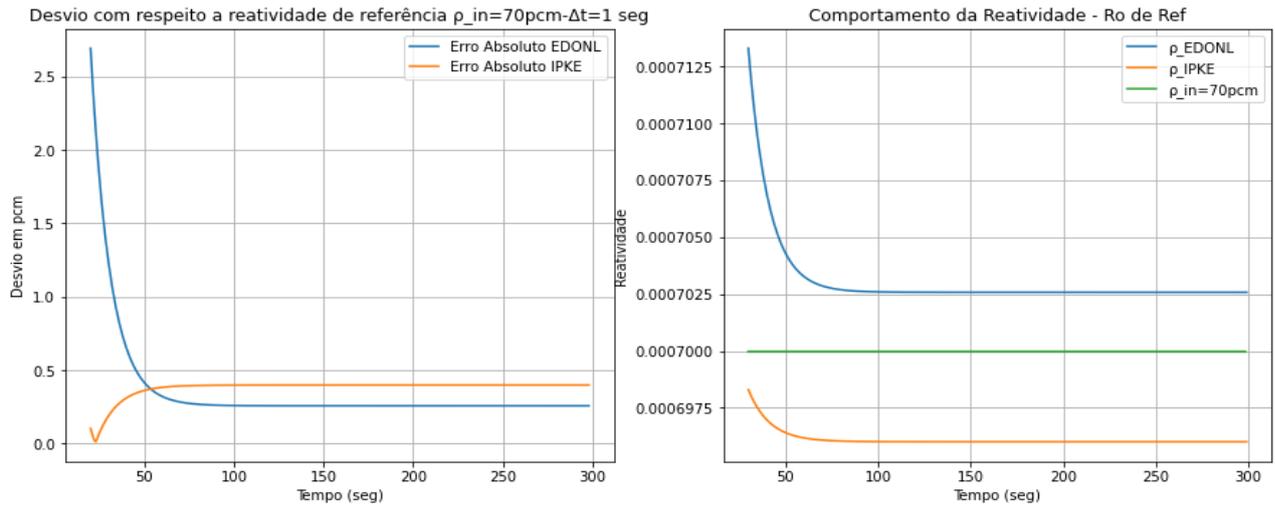


Figura 4.15 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 70 pcm, $\Delta t = 1 \text{ seg}$.

Tabela 4.16 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 70 \text{ pcm}$.

$\Delta t = 1 \text{ seg}$.				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 1.3 \text{ pcm}$	$\cong 0.3 \text{ pcm}$	$\cong 0.3 \text{ pcm}$	$\cong 0.3 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.38 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$

Com um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, têm-se pela formulação proposta, no intervalo considerado nas simulações anteriores, o erro de 1.3 pcm em 30 segundos e, concomitantemente, pela formulação clássica, o erro foi de 0.38 pcm, de acordo com a Figura 4.15 e a Tabela 4.16. No entanto, após 100 segundos, o valor do erro, dado pela formulação proposta, converge para 0.3 pcm; enquanto que pela formulação clássica, o erro converge para 0.4 pcm.

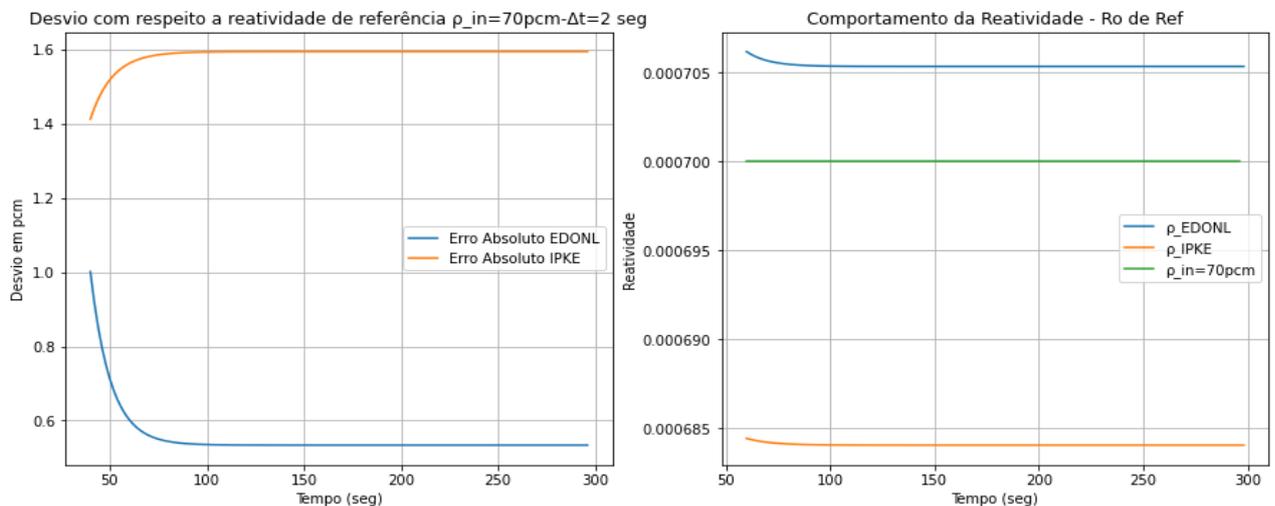


Figura 4.16 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 70 pcm, $\Delta t = 2 \text{ seg.}$

Tabela 4.17 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 70 \text{ pcm.}$

$\Delta t = 2 \text{ seg.}$				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 1.0 \text{ pcm}$	$\cong 0.5 \text{ pcm}$	$\cong 0.5 \text{ pcm}$	$\cong 0.5 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.4 \text{ pcm}$	$\cong 1.6 \text{ pcm}$	$\cong 1.6 \text{ pcm}$	$\cong 1.6 \text{ pcm}$

Para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos e considerando o mesmo intervalo das simulações anteriores, obtém-se no tempo de 30 segundos pela formulação proposta, o desvio máximo de 1.0 pcm e, pela formulação clássica, o desvio máximo foi de 1.4 pcm, de acordo com a Figura 4.16 e a Tabela 4.17.

O desvio absoluto, pelas formulações clássica e proposta, após 100 segundos, converge para respectivamente, 1.6 pcm e 0.5 pcm.

4.1.6. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 80 \text{ pcm}$

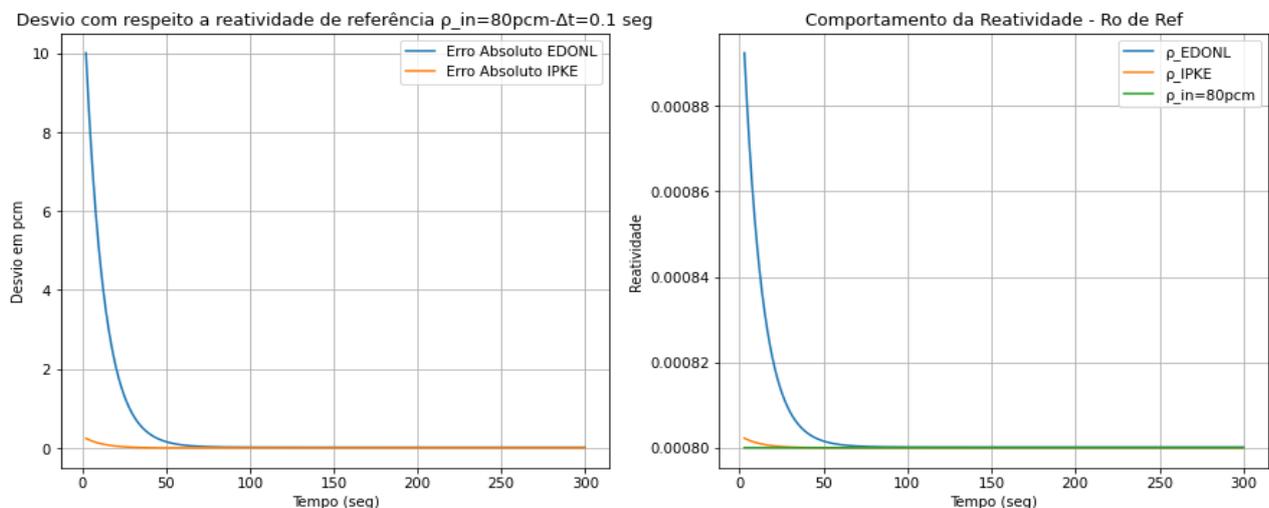


Figura 4.17 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 80 pcm, $\Delta t = 0.1 \text{ seg.}$

Tabela 4.18 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 80 \text{ pcm.}$

$\Delta t = 0.1 \text{ seg.}$				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 9.2 \text{ pcm}$	$\cong 7.1 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.22 \text{ pcm}$	$\cong 0.17 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$	$\cong 0.01 \text{ pcm}$

Na Figura 4.17 e na Tabela 4.18 são apresentados o comportamento temporal dos erros absolutos e da reatividade obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 80 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos.

Analisando as simulações verifica-se que o erro máximo ocorrido utilizando a formulação proposta foi de aproximadamente $10.0 pcm$ e, que após 60 segundos, a formulação proposta converge para um desvio absoluto de aproximadamente $0.01 pcm$, tal como a formulação clássica.

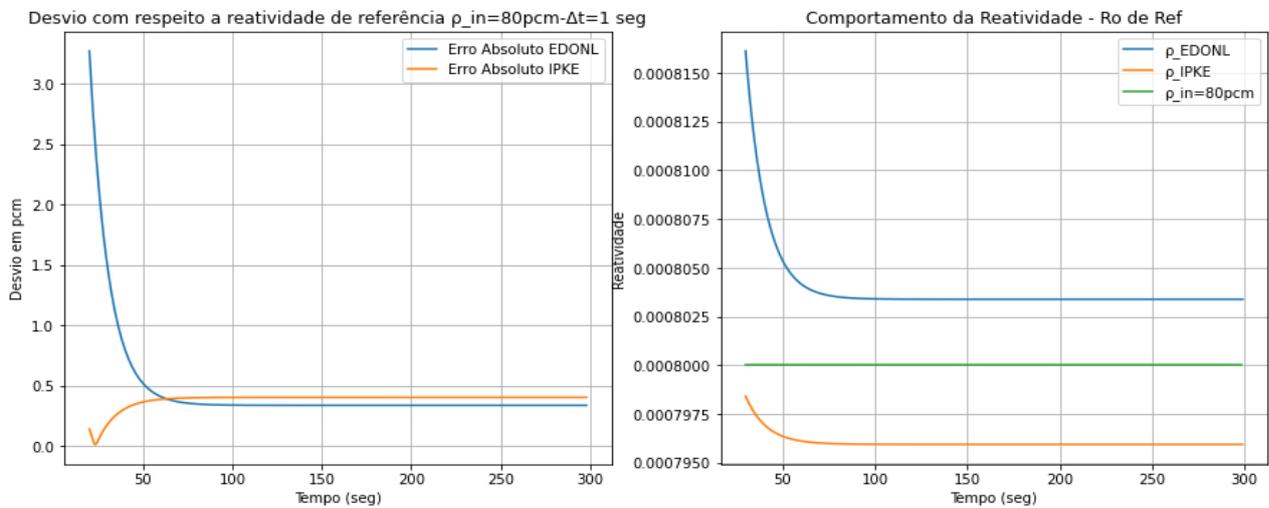


Figura 4.18 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a $80 pcm$, $\Delta t = 1 seg$.

Tabela 4.19 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 80 pcm$.

$\Delta t = 1 seg.$				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 1.6 pcm$	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.33 pcm$	$\cong 0.33 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.16 pcm$	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.4 pcm$

Com um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, tem-se pelas formulações clássica e proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, o desvio de $1.6 pcm$ em 30 segundos, conforme Figura 4.19 e a Tabela 4.19.

Após 100 segundos, os desvios obtidos pelas formulações clássica e proposta, convergem para respectivamente, $0.4 pcm$ e $0.33 pcm$.

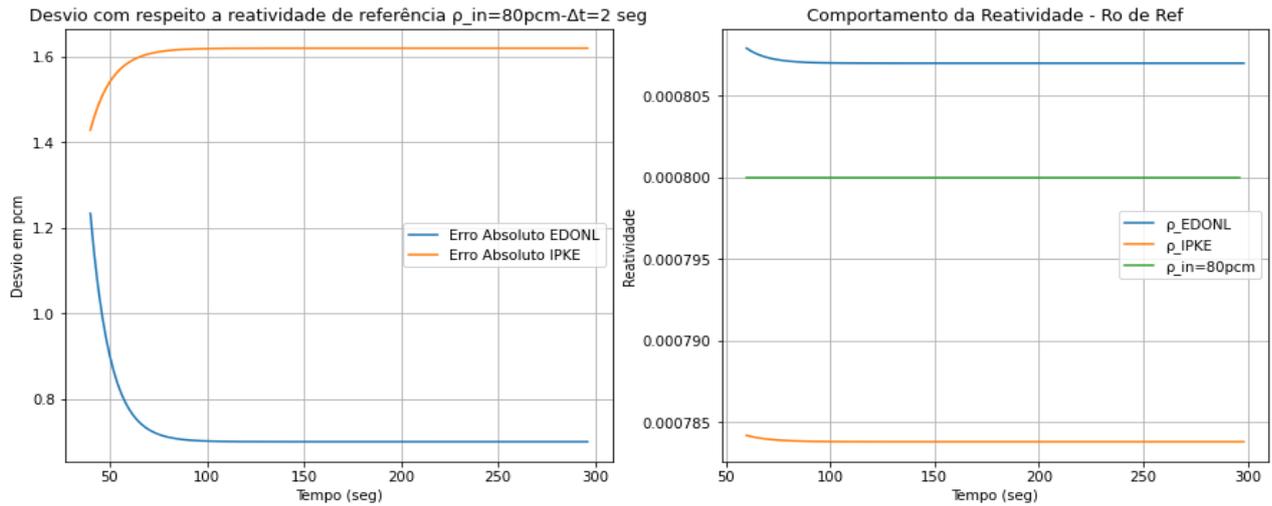


Figura 4.19 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 80 pcm, $\Delta t = 2\text{ seg}$.

Tabela 4.20 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 80\text{ pcm}$.

$\Delta t = 2\text{ seg}$.				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 0.8\text{ pcm}$	$\cong 0.7\text{ pcm}$	$\cong 0.7\text{ pcm}$	$\cong 0.7\text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.6\text{ pcm}$	$\cong 1.6\text{ pcm}$	$\cong 1.6\text{ pcm}$	$\cong 1.6\text{ pcm}$

Na Figura 4.19 e na Tabela 4.20 observa-se que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos, obtêm-se por meio da formulação proposta, admitindo o mesmo intervalo das demais simulações, o desvio máximo de 0.8 pcm em 30 segundos; enquanto que pela formulação clássica, o desvio máximo obtido em 30 segundos é de 1.6 pcm.

Após 100 segundos, pela formulação clássica não há aumento no desvio, no entanto, pela formulação proposta, o desvio de reatividade diminui para 0.7 pcm.

4.1.7. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 90 pcm$

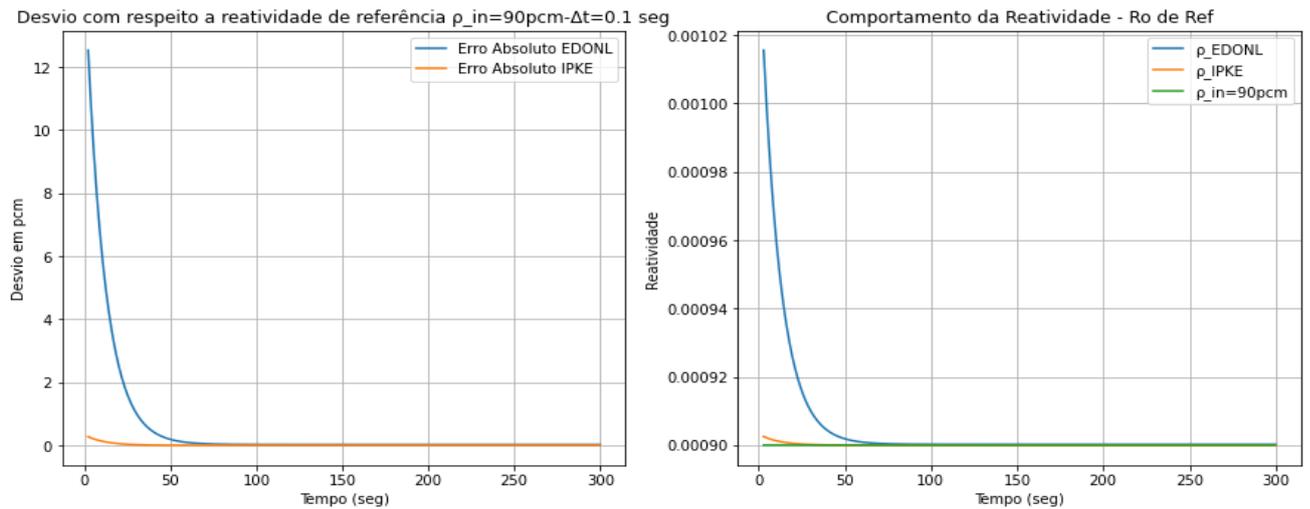


Figura 4.20 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 90 pcm, $\Delta t = 0.1 seg$.

Tabela 4.21 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 90 pcm$.

$\Delta t = 0.1 seg.$				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 11,6pcm$	$\cong 8,8pcm$	$\cong 0,22pcm$	$\cong 0,22pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0,19pcm$	$\cong 0,01pcm$	$\cong 0,01pcm$	$\cong 0,01pcm$

Na Figura 4.20 e na Tabela 4.21 são mostrados o comportamento temporal dos desvios absolutos e da reatividade obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 90 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos.

Analisando a Figura e a Tabela observa-se que o erro máximo ocorrido utilizando a formulação proposta, em 30 segundos, foi de 11.6 pcm e, que após 100 segundos, tal formulação converge para 0.22 pcm. Já na formulação clássica, o desvio absoluto converge para 0.01 pcm ao longo do tempo.

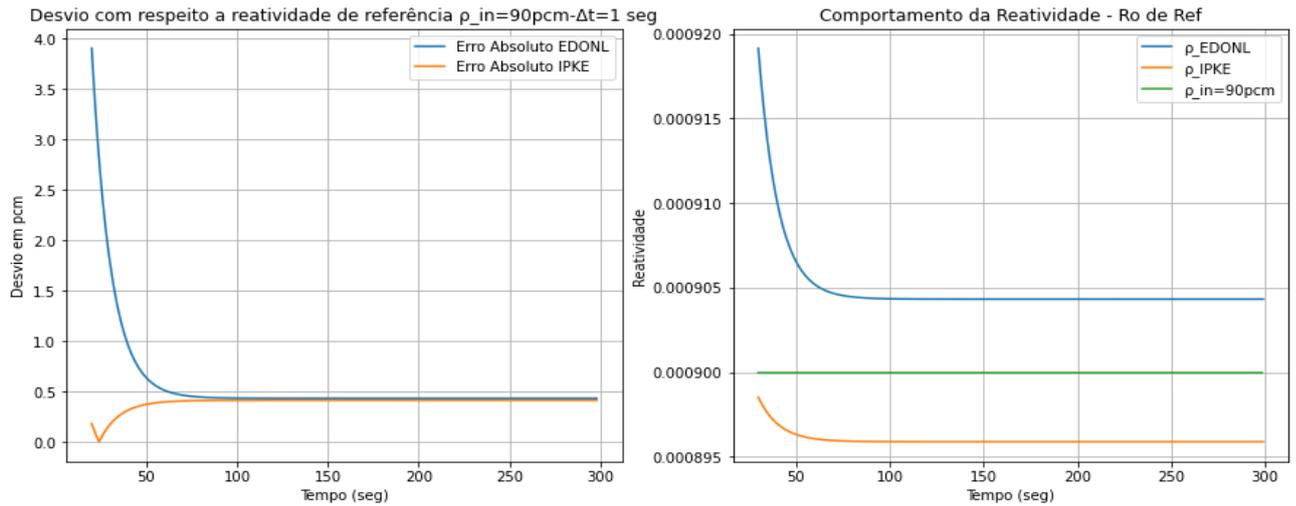


Figura 4.21 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 90 pcm, $\Delta t = 1 \text{ seg}$.

Tabela 4.22 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 90 \text{ pcm}$.
 $\Delta t = 1 \text{ seg}$.

Tempo	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 1.9 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$	$\cong 0.4 \text{ pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.6 \text{ pcm}$			

Com um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, tem-se pelas formulações clássica e proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, o erro máximo de 1.9 e 1.6 pcm, respectivamente, conforme Figura 4.21 e a Tabela 4.22.

Após 100 segundos, os desvios obtidos pelas formulações clássica e proposta, convergem para respectivamente, 1.6 pcm (sem mudança) e 0.4 pcm.

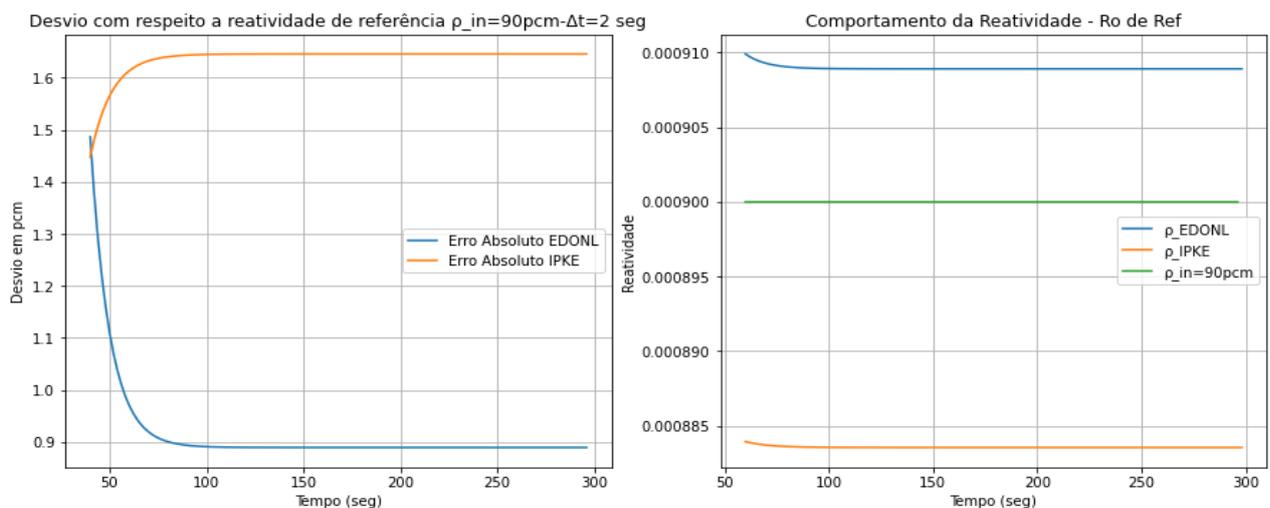


Figura 4.22 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 90 pcm, $\Delta t = 2 \text{ seg}$.

Tabela 4.23 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 90 pcm$.

$\Delta t = 2 seg.$				
$\begin{matrix} \text{Tempo} \\ \text{Erro Absoluto} \end{matrix}$	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{NLDE}(t) $	$\cong 1.0 pcm$	$\cong 0.89 pcm$	$\cong 0.89 pcm$	$\cong 0.89 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{CFIK}(t) $	$\cong 1.6 pcm$	$\cong 1.6 pcm$	$\cong 1.6 pcm$	$\cong 1.6 pcm$

Na Figura 4.22 e na Tabela 4.23 observa-se que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos, obtêm-se por meio da formulação proposta o desvio máximo de 1.0 pcm em 30 segundos; enquanto que pela formulação clássica, o desvio máximo obtido nesse mesmo tempo é de 1.6 pcm.

Após 100 segundos, pela formulação clássica não há aumento ou redução do desvio, no entanto, pela formulação proposta, o desvio de reatividade diminui para 0.89 pcm.

4.1.8. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 100 pcm$

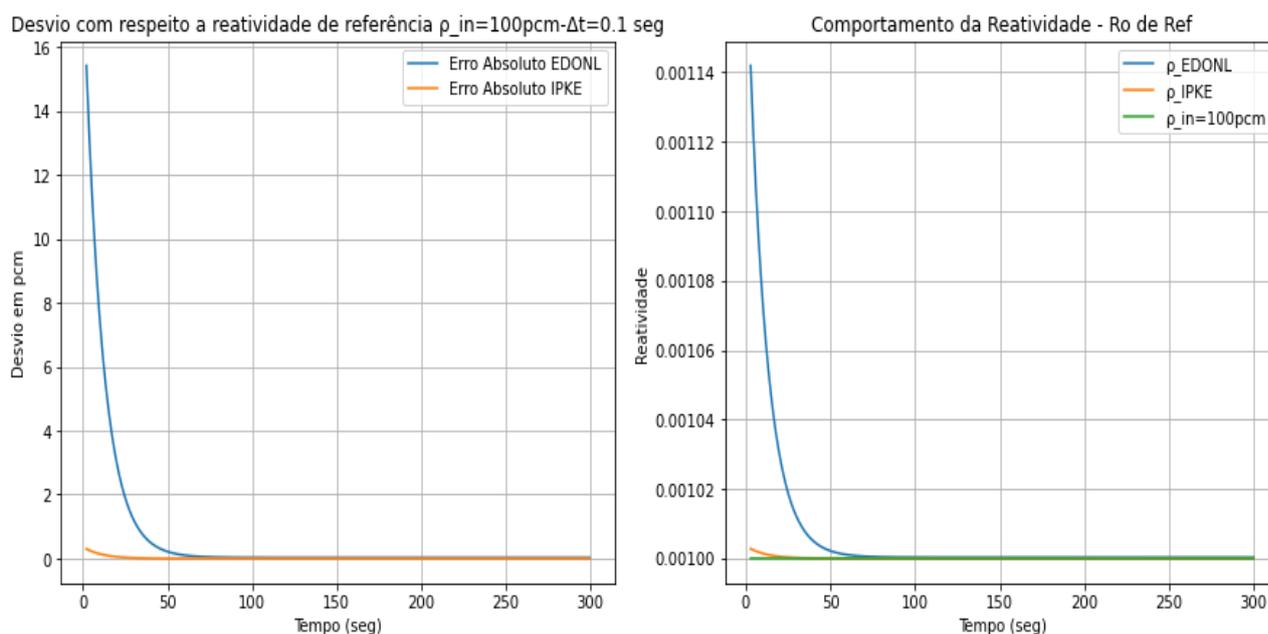


Figura 4.23 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 100 pcm, $\Delta t = 0.1 seg.$

Tabela 4.24 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 100 pcm$.

$\Delta t = 0.1 seg.$				
$\begin{matrix} \text{Tempo} \\ \text{Erro Absoluto} \end{matrix}$	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 15 pcm$	$\cong 11 pcm$	$\cong 0 pcm$	$\cong 0 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.3 pcm$	$\cong 0.2 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$

Na Figura 4.23 e na Tabela 4.24 são apresentados o comportamento temporal dos erros absolutos e da reatividade obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 100 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos.

Analisando os testes verifica-se que o erro ocorrido por meio da formulação proposta foi de aproximadamente $15.0 pcm$ e, que após 100 segundos, a formulação proposta converge para um erro de valor aproximado $0.0 pcm$.

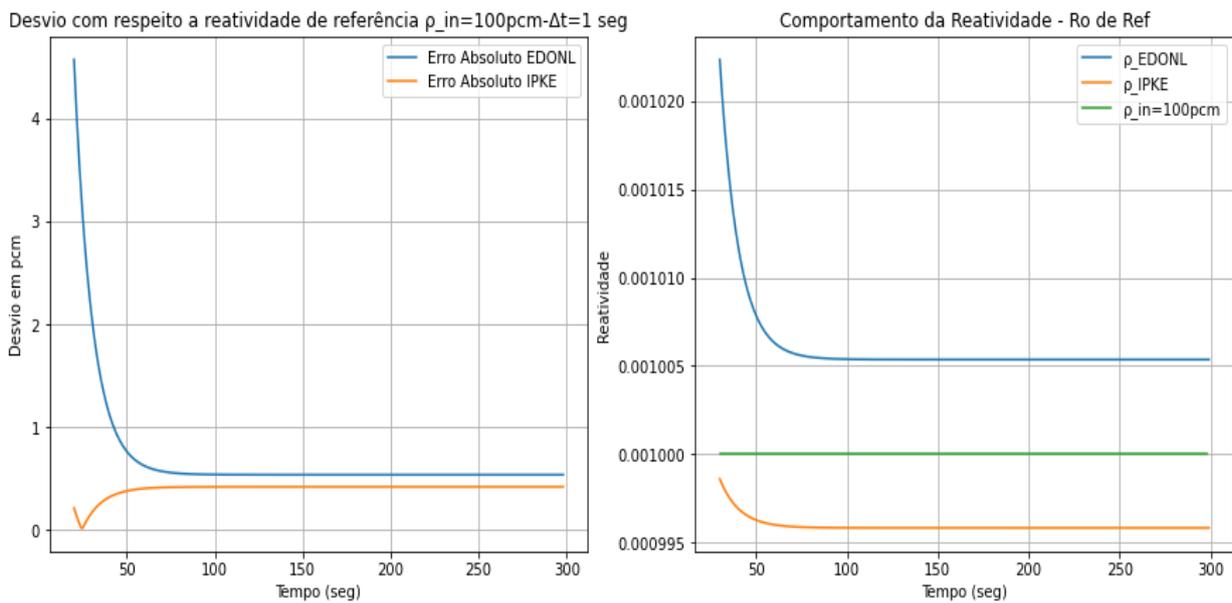


Figura 4.24 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a $100 pcm$, $\Delta t = 1 seg$.

Tabela 4.25 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 100 pcm$.

$\Delta t = 1 seg.$				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 2.2 pcm$	$\cong 0.6 pcm$	$\cong 0.5 pcm$	$\cong 0.5 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.4 pcm$	$\cong 0.2 pcm$	$\cong 0.2 pcm$	$\cong 0.2 pcm$

Com um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, tem-se pelas formulações clássica e proposta, em tempo igual a 30 segundos, o desvio máximo de 0.4 e $2.2 pcm$, respectivamente, conforme Figura 4.24 e a Tabela 4.25.

No entanto, após 100 segundos, os desvios obtidos pelas formulações clássica e proposta, convergem para, respectivamente, $0.2 pcm$ e $0.5 pcm$.

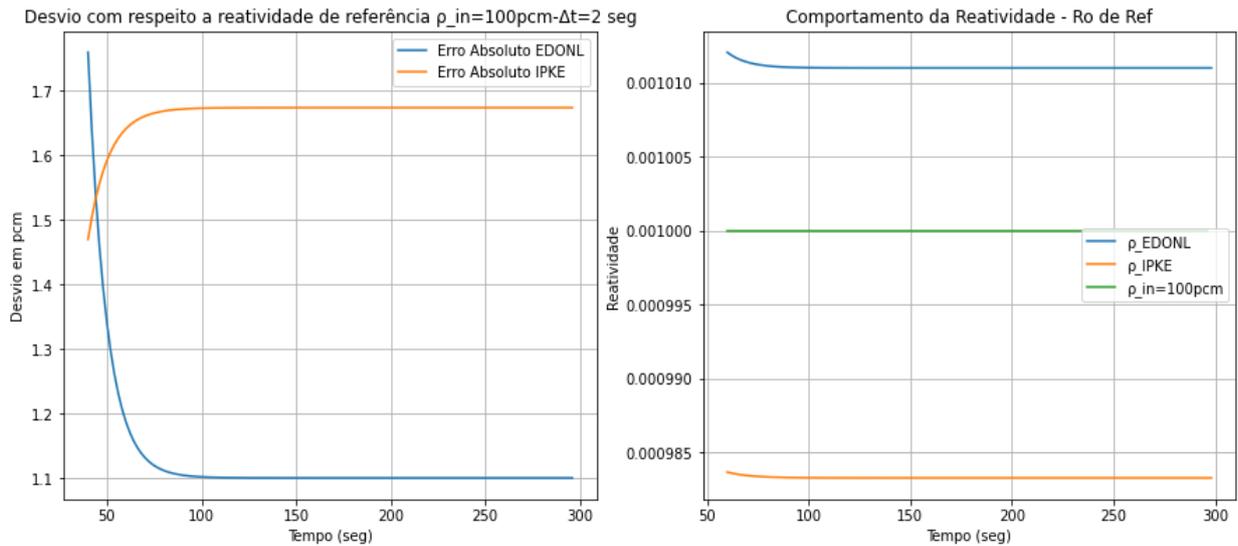


Figura 4.25 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 100 pcm, $\Delta t = 2$ seg.

Tabela 4.26 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 100$ pcm.

$\Delta t = 2$ seg.				
<i>Erro Absoluto</i> \ <i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 1.2pcm$	$\cong 1.1pcm$	$\cong 1.1pcm$	$\cong 1.1pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 1.7pcm$	$\cong 1.66pcm$	$\cong 1.67pcm$	$\cong 1.67pcm$

Na Figura 4.25 e na Tabela 4.26 é observado que para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos, obtêm-se por meio da formulação proposta o desvio máximo de 1.2 pcm em 30 segundos; enquanto que pela formulação clássica, o desvio máximo obtido nesse mesmo tempo é de 1.7 pcm.

Após 100 segundos, pela formulação clássica há uma pequena redução do desvio para aproximadamente 1.67, enquanto que pela formulação proposta, o desvio de reatividade diminui para 1.1 pcm, aproximadamente.

4.1.9. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 200 pcm$

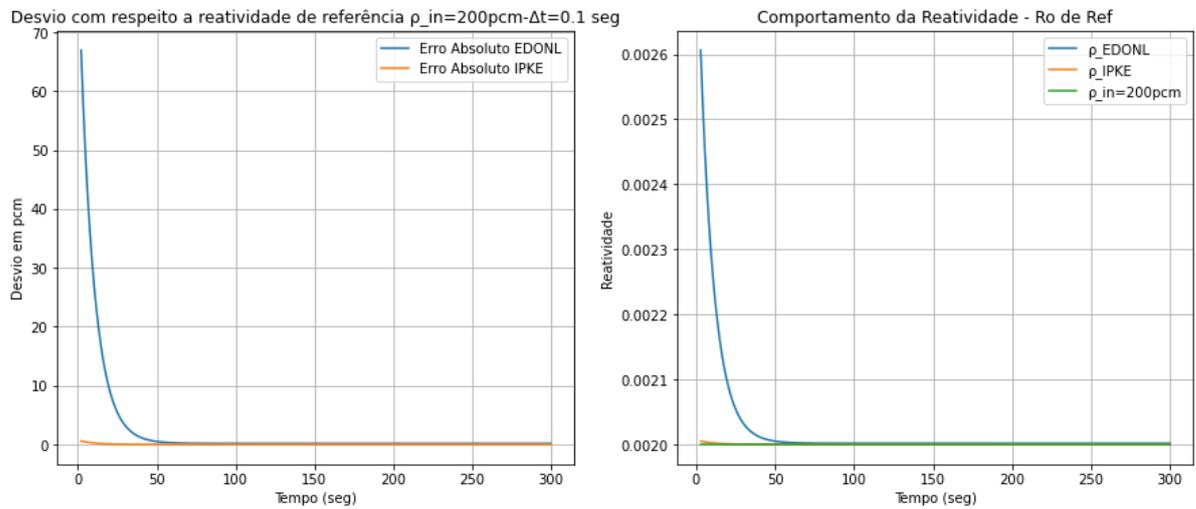


Figura 4.26 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 200 pcm, $\Delta t = 0.1 seg$.

Tabela 4.27 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 200 pcm$.

$\Delta t = 0.1 seg.$				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 60 pcm$	$\cong 45 pcm$	$\cong 0.16 pcm$	$\cong 0.16 pcm$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.5 pcm$	$\cong 0.37 pcm$	$\cong 0.01 pcm$	$\cong 0.01 pcm$

Na Figura 4.26 e na Tabela 4.27 são mostrados o comportamento temporal dos desvios absolutos e da reatividade obtidos pelas formulações clássica e proposta em comparação a uma reatividade de entrada de $\rho_{in} = 200 pcm$, considerando o passo de tempo igual a $\Delta t = 0.1$ segundos.

Analisando a Figura 4.26 e a Tabela 4.27 observa-se que o erro máximo ocorrido utilizando a formulação proposta, em 30 segundos, foi de 60 pcm e, que após 60 segundos, tal formulação converge para 0.16 pcm. Já pela formulação clássica, o desvio absoluto converge para 0.01 pcm com o tempo.

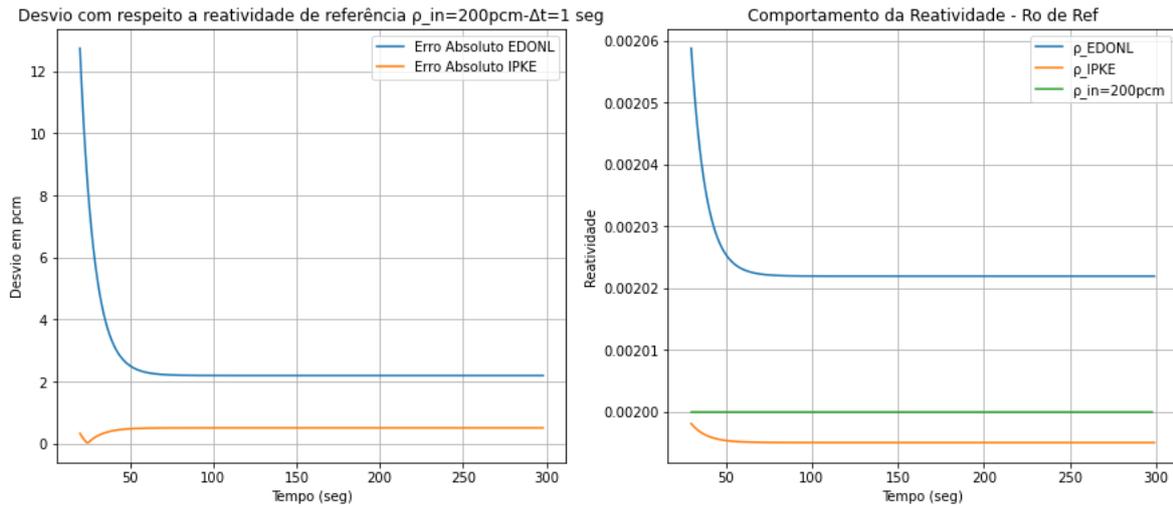


Figura 4.27 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 200 pcm, $\Delta t = 1\text{ seg}$.

Tabela 4.28 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 200\text{ pcm}$.
 $\Delta t = 1\text{ seg}$.

<i>Erro Absoluto</i> \ <i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 5.9\text{pcm}$	$\cong 2.3\text{pcm}$	$\cong 2.2\text{pcm}$	$\cong 2.2\text{pcm}$
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 0.2\text{pcm}$	$\cong 0.5\text{pcm}$	$\cong 0.5\text{pcm}$	$\cong 0.5\text{pcm}$

Para um passo de tempo igual a $\Delta t = 1$ segundo, obtêm-se pelas formulações clássica e proposta, no intervalo entre 0 a 300 segundos, o desvio de 0.2 e 5.9 pcm em 30 segundos, conforme Figura 4.27 e a Tabela 4.28.

Após 100 segundos, os desvios obtidos pelas formulações clássica e proposta, convergem para respectivamente, 0.5 pcm e 2.2 pcm.

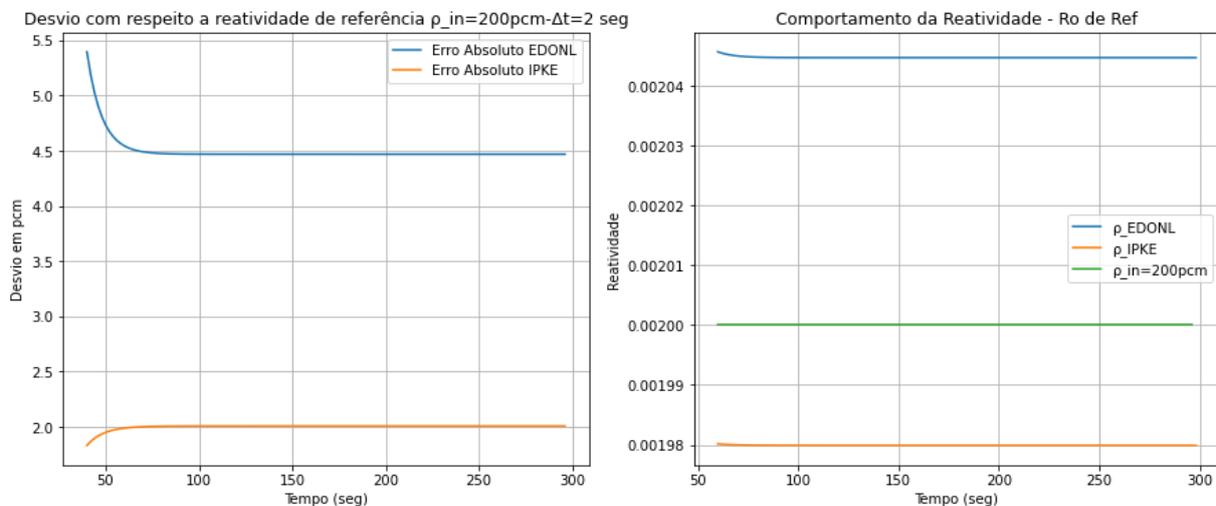


Figura 4.28 – Erro, ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} com respeito à reatividade de referência igual a 200 pcm, $\Delta t = 2$ seg.

Tabela 4.29 – Erro Absoluto (pcm) - $\rho_{in} = 200$ pcm.

$\Delta t = 2$ seg.				
<i>Tempo</i>	30 seg.	60 seg.	30 min	60 min
<i>Erro Absoluto</i>				
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{EDONL} $	$\cong 4.6$ pcm	$\cong 4.5$ pcm	$\cong 4.5$ pcm	$\cong 4.5$ pcm
$ \rho_{in} - \rho_{out}^{IPKE} $	$\cong 2.0$ pcm	$\cong 2.0$ pcm	$\cong 2.0$ pcm	$\cong 2.0$ pcm

Para um passo de tempo igual a $\Delta t = 2$ segundos e considerando o mesmo intervalo das simulações anteriores, obtém-se no tempo de 30 segundos pela formulação proposta, o desvio máximo de 4.6 pcm e, pela formulação clássica, o desvio máximo foi de 2.0 pcm, de acordo com a Figura 4.28 e a Tabela 4.29.

O desvio absoluto, após 100 segundos, pela formulação clássica converge para 2.0 pcm. Já pela formulação proposta, o desvio tem convergência no valor de 4.5 pcm.

Em síntese, a partir da análise dos dados das Figuras de 4.2 a 4.28 e das Tabelas de 4.3 a 4.29, verifica-se que a nova formulação proposta representa adequadamente o comportamento esperado da reatividade, de modo que o desvio máximo obtido no intervalo de tempo entre 30 seg. e 100 seg, para as reatividades de entrada: $\rho_{in} = 30$ pcm a $\rho_{in} = 90$ pcm, foi de 11.6 pcm, num passo de tempo igual a 0.1 segundos. No entanto, após 100 segundos o desvio para a formulação proposta converge para valores compreendidos entre 0.0 pcm a 0.89 pcm. Observa-se também que para o passo tempo maior que 1 segundo, nesse caso 2 segundos, o desvio máximo obtido no intervalo de tempo entre 30 seg. e 300 seg., usando-se a formulação proposta, é sempre menor que o desvio máximo obtido pela formulação clássica. Logo, a formulação proposta apresenta uma excelente resposta para teste de pequenas inserções de reatividades.

Por outro lado, o desvio máximo obtido entre 30 seg. e 100 seg, para $\rho_{in} = 100$ pcm e $\rho_{in} = 200$ pcm, usando-se a formulação proposta, foi de 15 pcm e 60 pcm, respectivamente, para um passo de tempo de 0.1 segundos. Após 100 segundos, esses desvios convergem para os valores de 0.0 pcm para as reatividades de entrada: $\rho_{in} = 100$ pcm e 0.16 pcm, para $\rho_{in} = 200$ pcm. Assim, verifica-se que a formulação proposta apresenta um bom resultado mesmo para o caso de grandes inserções de reatividades. Além disso, em ambos os casos a formulação proposta mostrou-se estável, convergindo para um desvio menor do que 10 pcm.

Portanto, isso revela que o método proposto é estável e adequado para testes em que o passo de tempo é menor, igual ou maior a 1 segundo.

4.2. Comparação dos Métodos Numéricos: Resultados Após a Interrupção da Medição da Reatividade

Nas Figuras a seguir são apresentados alguns casos em que são simulados o desligamento do medidor de reatividade, considerando as seguintes reatividades de entrada: $\rho_{in} = 30 pcm$, $\rho_{in} = 40 pcm$, $\rho_{in} = 50 pcm$, e $\rho_{in} = 60 pcm$, $\rho_{in} = 70 pcm$, $\rho_{in} = 80 pcm$, $\rho_{in} = 90 pcm$, $\rho_{in} = 100 pcm$. Os testes realizados consideraram o passo de tempo de $\Delta t = 0.1$ segundos, com interrupção em 150 segundos e retomada em 250 segundos.

4.2.1. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 30 pcm$

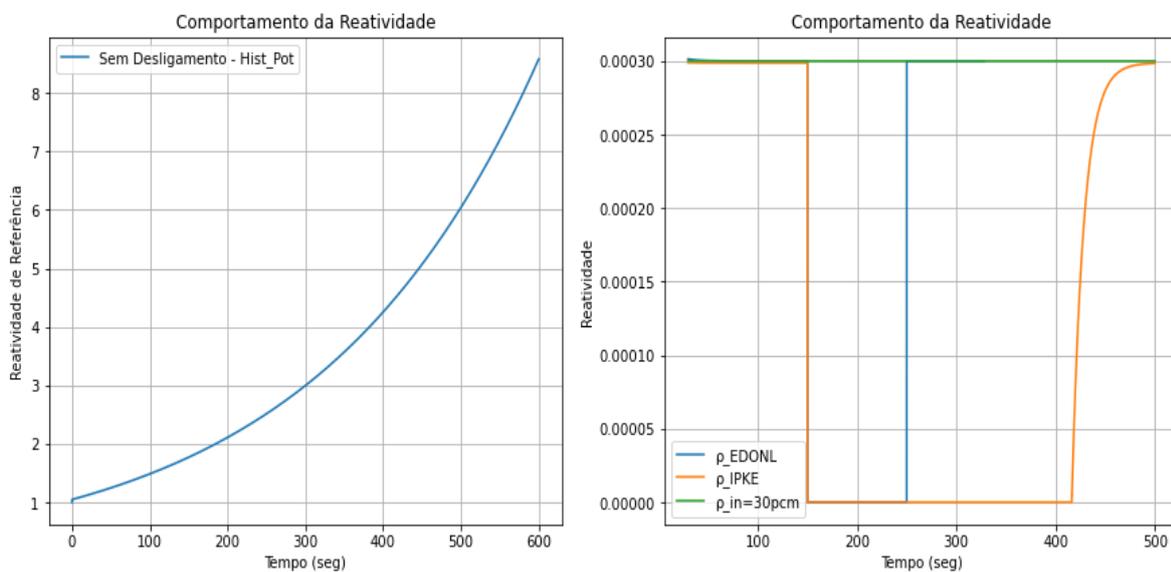


Figura 4.29 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 30 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

4.2.2. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 40 pcm$

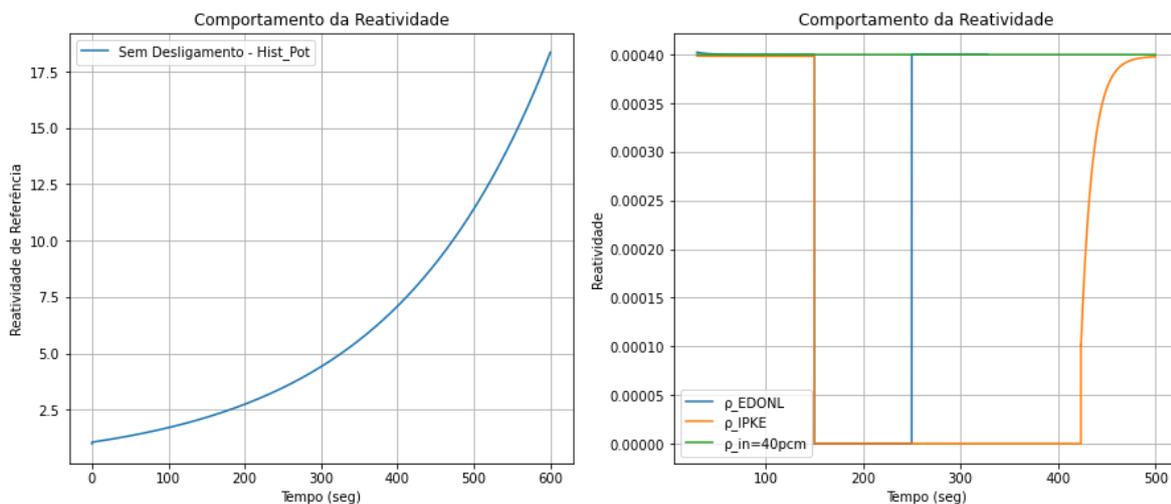


Figura 4.30 – Simulação de desligamento do medidor de reatidade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 40 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

4.2.3. Para o valor de reatidade de entrada: $\rho_{in} = 50 pcm$

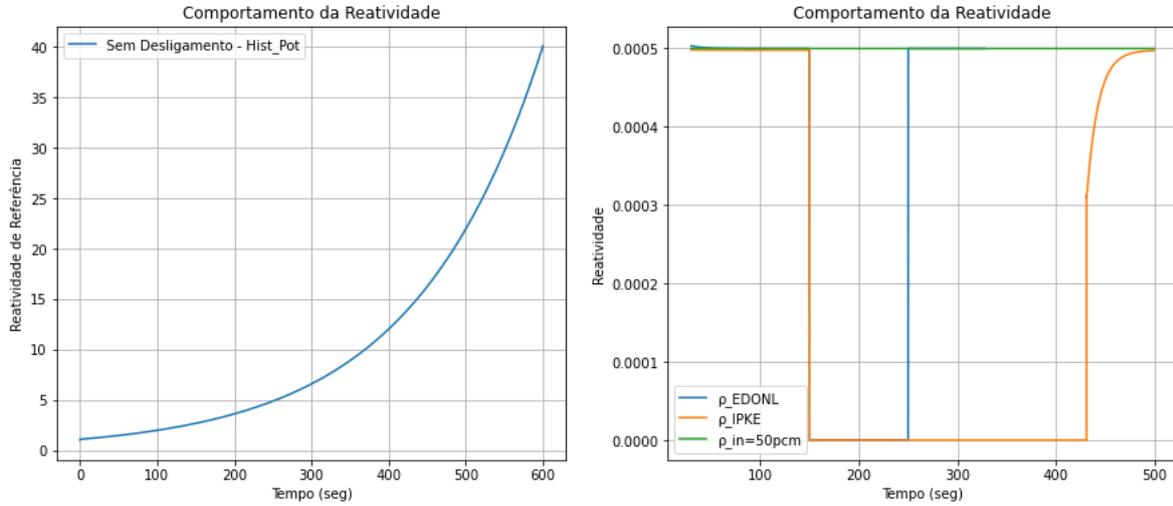


Figura 4.31 – Simulação de desligamento do medidor de reatidade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 50 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

4.2.4. Para o valor de reatidade de entrada: $\rho_{in} = 60 pcm$

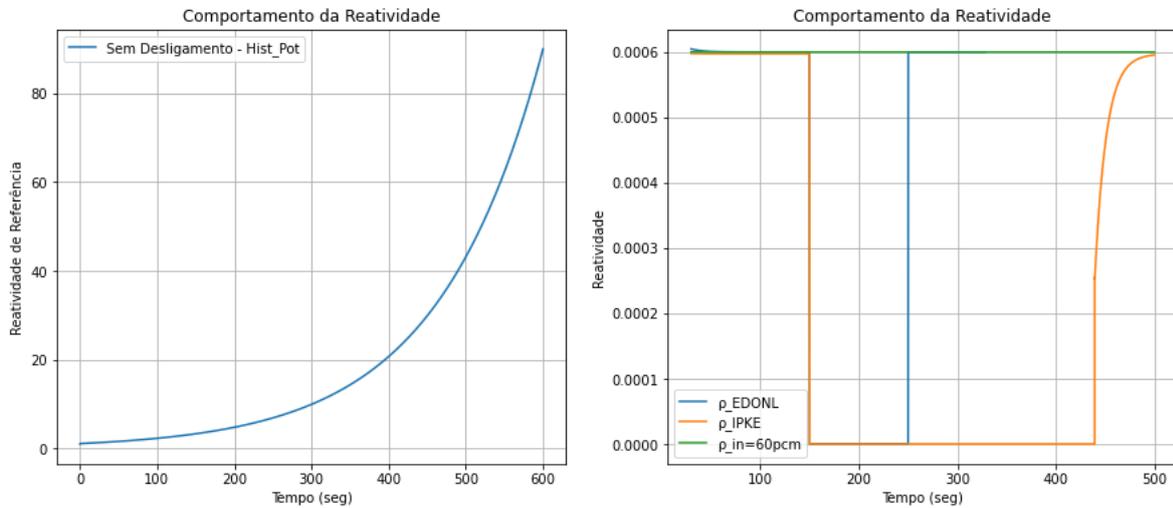


Figura 4.32 – Simulação de desligamento do medidor de reatidade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 60 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

4.2.5. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 70 pcm$

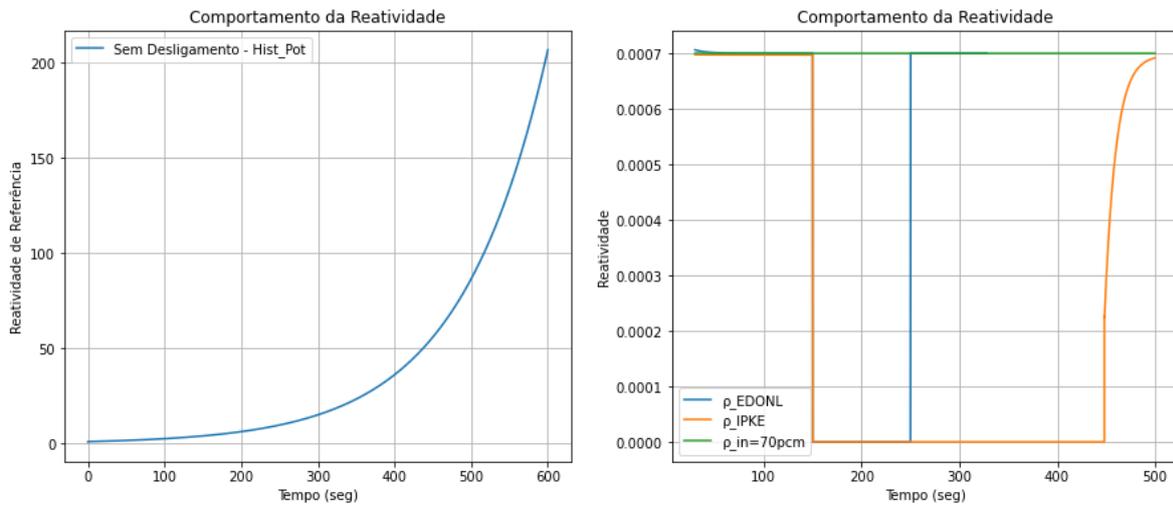


Figura 4.33 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 70 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

4.2.6- Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 80 pcm$

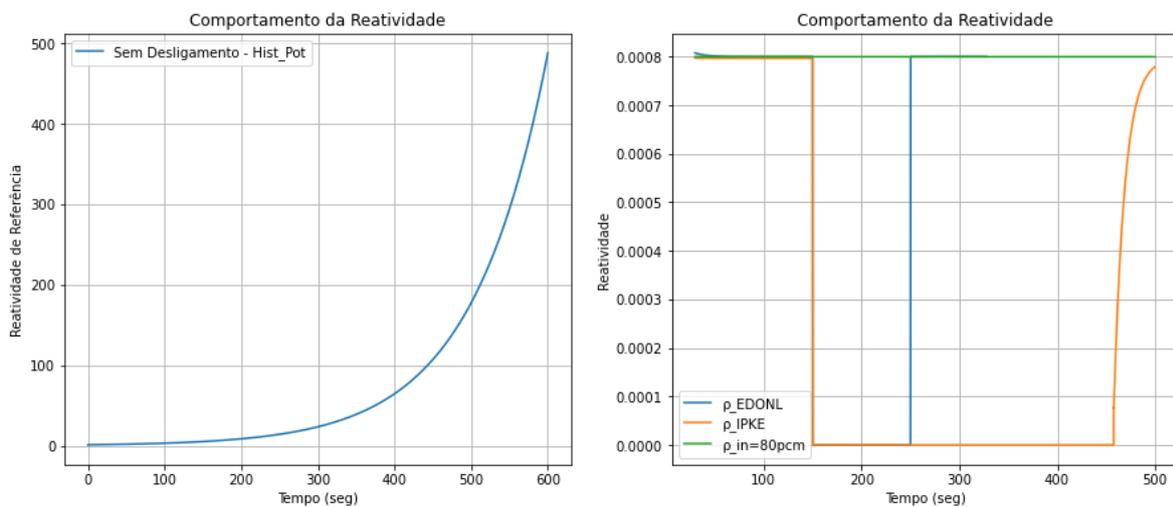


Figura 4.34 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 80 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

4.2.7. Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 90 pcm$

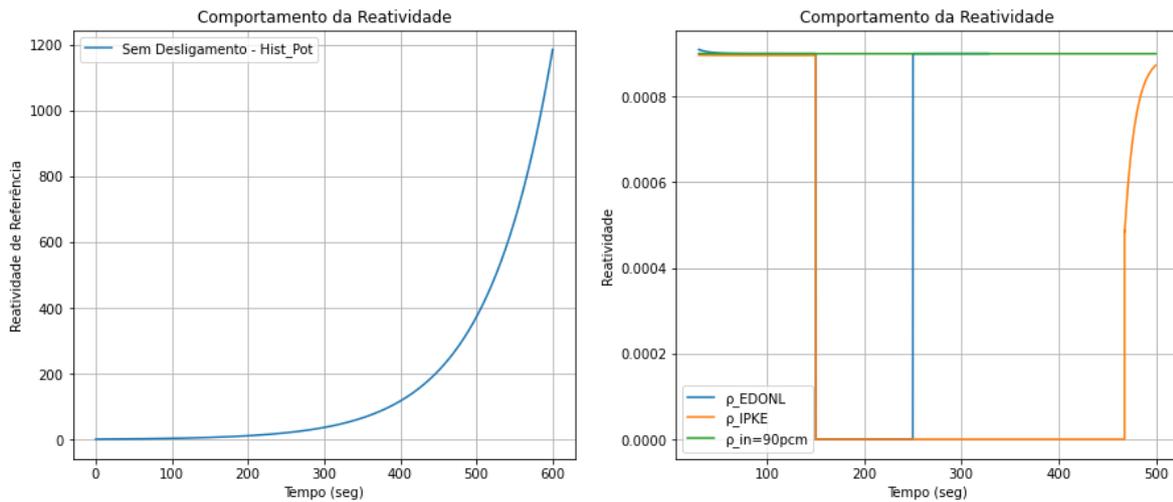


Figura 4.35 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 90 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

4.2.8- Para o valor de reatividade entrada: $\rho_{in} = 100 pcm$

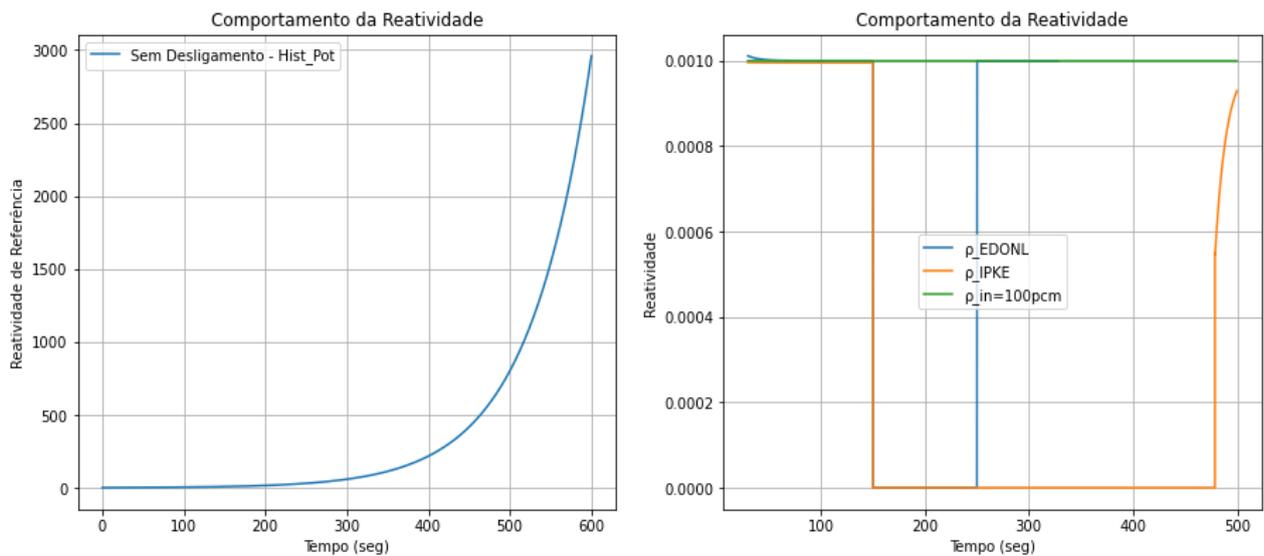


Figura 4.36 – Simulação de desligamento do medidor de reatividade para ρ_{out}^{IPKE} e ρ_{out}^{EDONL} para $\rho_{in} = 100 pcm$ e $\Delta t = 0.1 seg$.

Partindo das Figuras de 4.29 a 4.36, pode-se verificar que a formulação proposta (Equação (3.47)) admite uma retomada precisa e instantânea do cálculo da reatividade após uma interrupção do medidor de reatividade em tempo real, tornando-se viável para uma monitoração contínua da reatividade. De outro modo, como a formulação clássica tem uma considerável dependência do histórico de potência nuclear, há a necessidade de um acúmulo dos dados de amostragem da potência nuclear para a recuperação do cálculo da reatividade, o que

consequentemente faz com que a interrupção no medidor de reatividade em tempo real aconteça por um tempo maior que 150 segundos, gerando, assim, uma imprecisão no cálculo da reatividade no intervalo de tempo entre 250 *seg.* e 599 *seg.*

4.3- Análise dos resultados para diferentes valores de β : método de perturbação no parâmetro β

Nas simulações a seguir são apresentados os resultados obtidos para a nova formulação proposta e a formulação clássica, considerado diferentes valores de β além do valor determinado, isto é, $\beta = 0.00665$, $\beta = 0.007$ (valor considerado inicialmente) e $\beta = 0.00735$, para os seguintes valores de reatividade de entrada: $\rho_{in}=50$ pcm, $\rho_{in}=100$ pcm, $\rho_{in}=300$ pcm e $\rho_{in}=400$ pcm, e diferentes passos de tempo Δt . Os valores 0.00665 e 0.00735 adotados para o parâmetro β são decorrentes de uma perturbação de 5% no seu valor de 0.007.

4.3.1. Para o valor de reatividade de entrada: $\rho_{in} = 50$ pcm

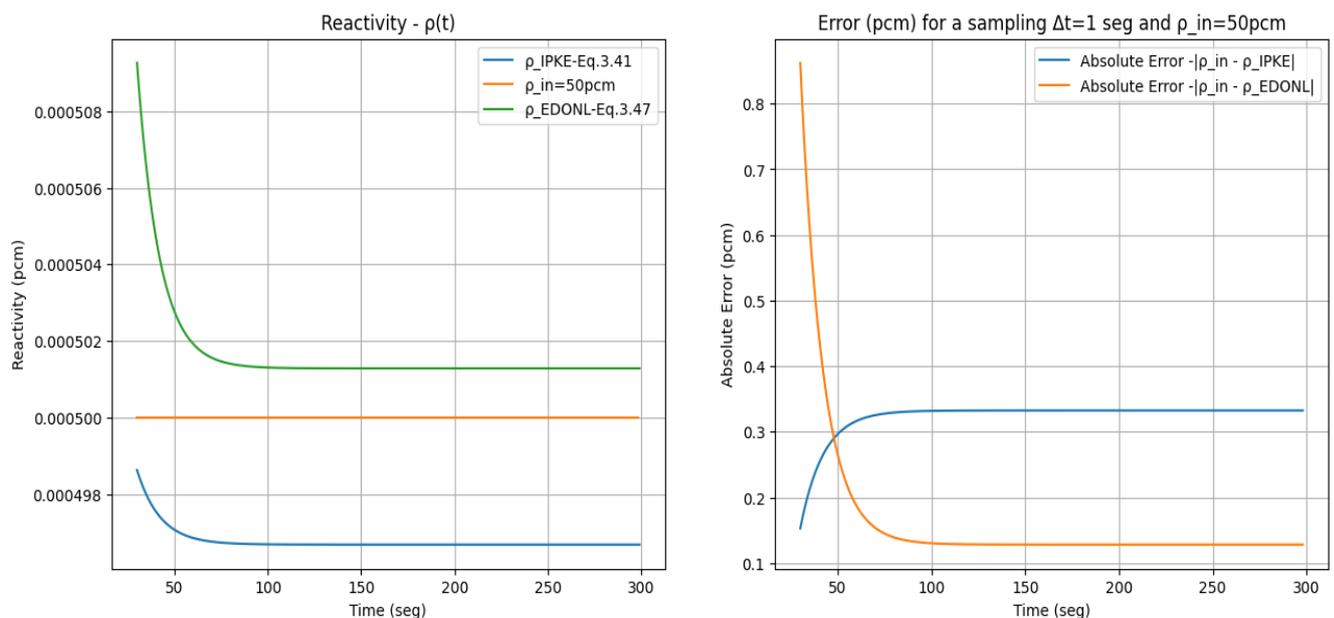


Figura 4.37 – Erro pcm e $\rho_{out}^{IPKE}(t)$ e $\rho_{out}^{EDONL}(t)$ para o caso $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} \text{seg}$ $\rho_{in} = 50$ pcm - $\Delta t = 1$ seg, $\beta = 0.00665$.

Na Figura 4.37 observa-se o desvio máximo obtido pela formulação proposta no intervalo de tempo entre 30 *seg.* e 300 *seg.* foi de aproximadamente 0.9 pcm. No entanto, após 100 *seg.* a formulação proposta converge para um desvio de 0.1 pcm com respeito a ρ_{in} , enquanto a formulação clássica converge para um desvio de aproximadamente 0.32 pcm.

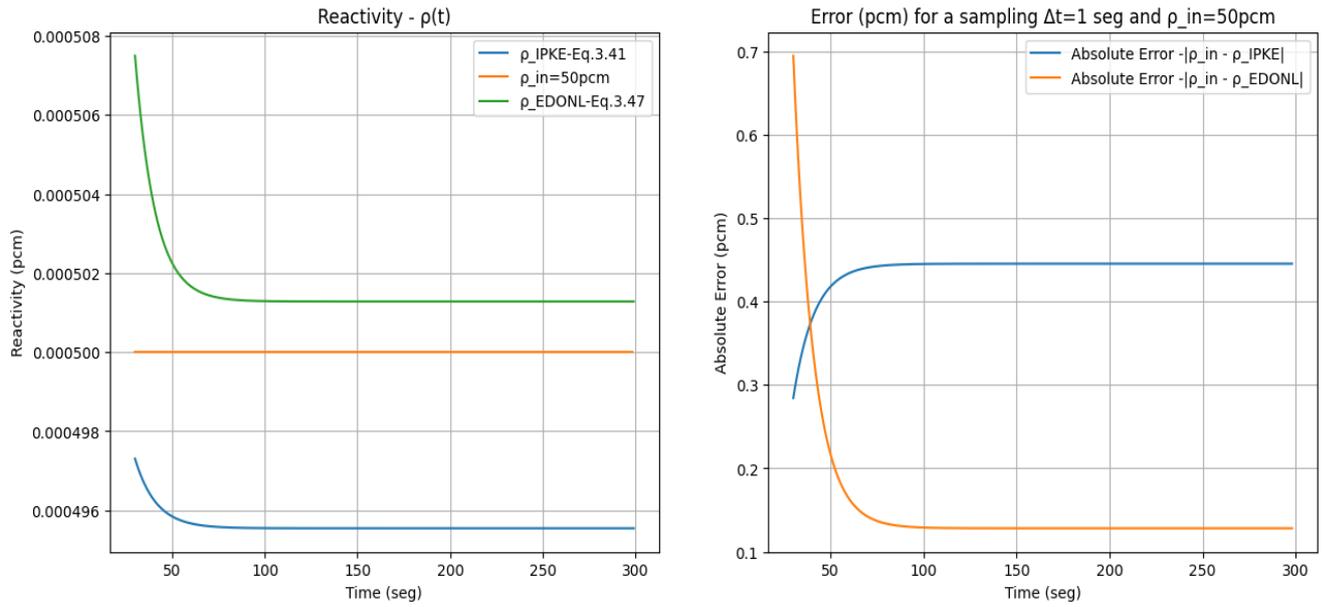


Figura 4.38 – Erro pcm e $\rho_{out}^{IPKE}(t)$ e $\rho_{out}^{EDONL}(t)$ para o caso $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} seg$ $\rho_{in} = 50 pcm$ - $\Delta t = 1 seg$, $\beta = 0.00735$.

Na Figura 4.38 observa-se o desvio máximo obtido pela formulação proposta no intervalo de tempo entre 30 seg. e 300 seg foi de aproximadamente 0.8 pcm . No entanto, após 100 seg. a formulação proposta converge para um desvio de aproximadamente 0.1 pcm com respeito a ρ_{in} , enquanto a formulação clássica converge para um desvio de aproximadamente 0.45 pcm .

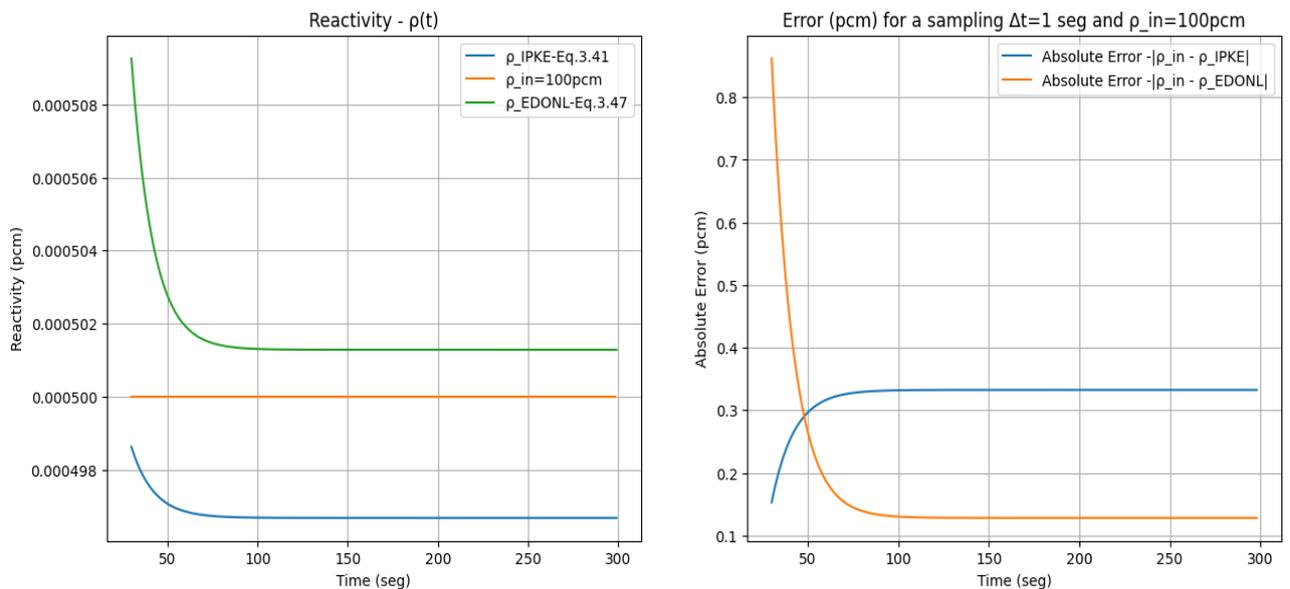


Figura 4.39 – Erro pcm e $\rho_{out}^{IPKE}(t)$ e $\rho_{out}^{EDONL}(t)$ para o caso $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} seg$ $\rho_{in} = 100 pcm$ - $\Delta t = 1 seg$, $\beta = 0.00665$.

Na Figura 4.39 observa-se que a formulação proposta converge para um desvio de aproximadamente 0.1 pcm com respeito a ρ_{in} , enquanto a formulação clássica converge para um desvio de aproximadamente 0.31 pcm.

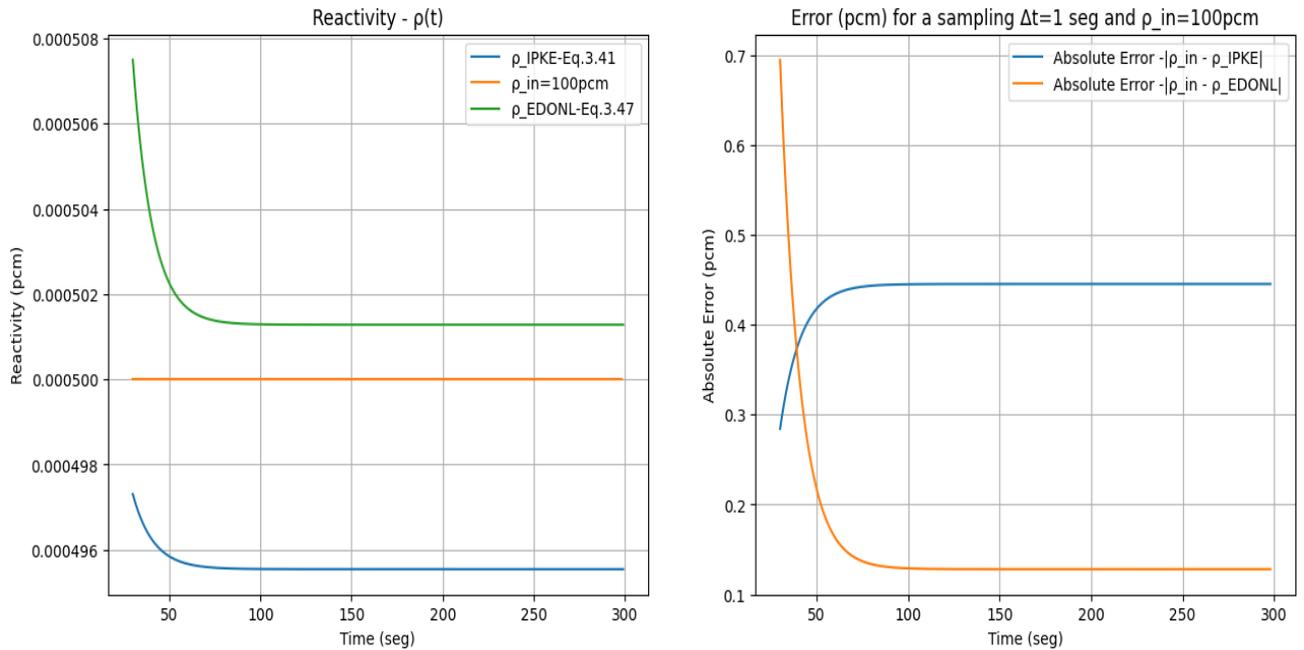


Figura 4.40 – Erro pcm e $\rho_{out}^{IPKE}(t)$ e $\rho_{out}^{EDONL}(t)$ para o caso $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} \text{seg}$ $\rho_{in} = 100 \text{pcm}$ - $\Delta t = 1 \text{seg}$, $\beta = 0.00735$.

Na Figura 4.40 observa-se que o desvio obtido pela formulação proposta após 100 seg foi de aproximadamente 0.1 pcm. Já a formulação clássica converge para um desvio de aproximadamente 0.45 pcm.

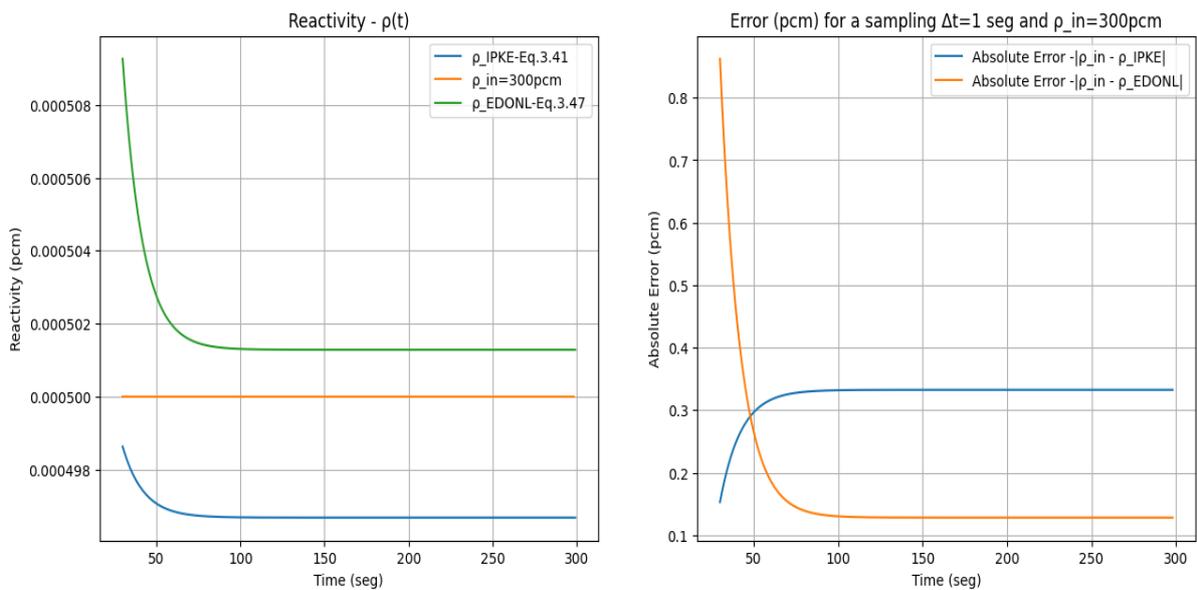


Figura 4.41 – Erro pcm e $\rho_{out}^{CFIK}(t)$ e $\rho_{out}^{NLDE}(t)$ para o caso $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} \text{seg}$ $\rho_{in} = 300 \text{pcm}$ - $\Delta t = 1 \text{seg}$, $\beta = 0.00665$.

Na Figura 4.41 observa-se que o desvio obtido pela formulação proposta após 100 seg foi de aproximadamente 0.1 pcm, e a formulação clássica converge para um desvio de aproximadamente 0.32 pcm.

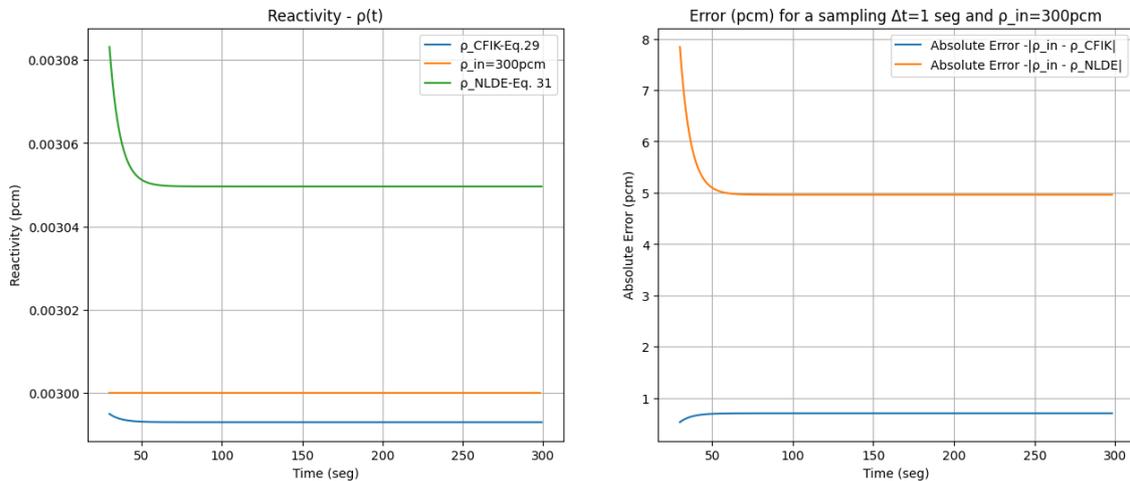


Figura 4.42 – Erro pcm e $\rho_{out}^{IPKE}(t)$ e $\rho_{out}^{EDONL}(t)$ pra o caso $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} seg$ $\rho_{in} = 300 pcm$ - $\Delta t = 1 seg$, $\beta = 0.00735$.

Na Figura 4.42 observa-se que desvio obtido pela formulação proposta após 100 seg foi de 5 pcm. Já a formulação clássica converge para um desvio de aproximadamente 1 pcm, após esse mesmo intervalo de tempo.

Nos casos representados pelas Figuras 4.39, 4.40, 4.41 e 4.42 a formulação proposta convergiu para um erro menor que a formulação clássica. Na Figura 4.42, verifica-se que a formulação proposta apresenta um bom resultado mesmo para o caso de grandes inserções de reatividades. Por fim, a formulação proposta mostrou-se estável, convergindo para um desvio menor do que 6 pcm.

5. Conclusão

A reatividade é um dos parâmetros mais importante dependente do tempo, pois interfere propriamente no controle reator nuclear. Em testes físicos durante o processo de partida do reator nuclear, faz-se necessário o contínuo monitoramento online da reatividade para a segurança da usina nuclear. Entretanto, para o caso dos reatores híbridos ADS, o monitoramento da reatividade é essencial durante toda a operação do reator ADS, visto que esses reatores operam em um estado subcrítico e por isso não podem sustentar sozinhos uma reação em cadeia, sendo

necessário um acelerador de prótons para iniciar e controlar a taxa de fissão no núcleo dos ADS. A operação subcrítica dos ADS permite ajuste da reatividade, ou seja, a quantidade de reatividade necessária para atingir a criticidade.

Para a medição da reatividade em tempo real é usado o reatímetro. O reatímetro usa a Equação da cinética pontual inversa clássica, que neste trabalho é descrita pela formulação clássica (3.41). Por ser fortemente dependente do histórico de variação de potência nuclear, esta Equação não é viável para ser usada diretamente em cálculos de reatividade em tempo real.

Desta maneira, este trabalho teve como objetivo apresentar uma nova formulação para o cálculo da reatividade, Equação (3.47), que não depende de histórico de variação de potência nuclear, possibilitando, com isso, numa monitoração contínua reatividade em tempo real.

A formulação proposta é uma Equação diferencial não linear de primeira ordem para a reatividade, que foi originada de um processo de integração por partes e do uso da aproximação de *prompt-jump*.

Após testes comparativos utilizando a formulação proposta da cinética pontual inversa e a formulação da cinética pontual inversa clássica, considerando diferentes formas de potência nuclear, observou-se que: (1) possibilita uma monitoração contínua da reatividade em tempo real, com um desvio máximo 11.6 pcm e convergência para valores entre 0.0 pcm a 0.89 pcm, para reatividades de entrada de 30 pcm a 90 pcm e, desvio máximo de 60 pcm e rápida convergência para valores entre 0.0 pcm a 4.5 pcm, para grandes inserções de reatividades, como 100 pcm e 200 pcm. Logo, a formulação proposta apresenta uma excelente resposta para testes de pequenas inserções de reatividades e, um bom resultado para testes com grandes inserções de reatividades.

(2) Com base nas Figuras de 4.29 a 4.36, é evidente que a formulação proposta (Equação (3.47)) permite a retomada imediata e precisa do cálculo da reatividade após a interrupção do medidor de reatividade em tempo real. Isso a torna adequada para a monitorização contínua da reatividade.

(3) Também observa-se que formulação proposta apresenta ótimos resultados em testes em que o parâmetro β foi analisado pelo método de perturbação. Ao perturbar o parâmetro β em 5% do seu valor de 0.007, obtém-se resultados que mostraram que a formulação proposta convergiu para um erro menor que a formulação clássica. E nos casos de grandes inserções de reatividade, verifica-se que a formulação proposta apresenta bons resultados.

(4) A formulação proposta mostrou-se bastante vantajosa em relação à tradicional, uma vez que não sendo dependente do histórico de potência nuclear, não perde a precisão após uma interrupção no reatímetro, visto que permite a retomada imediata do cálculo da reatividade em

qualquer instante de tempo.

(5) Mesmo escrita de forma colapsada de 6 para 1 grupo de precursores (Equação 3.47), a formulação proposta mostrou-se ser simples e precisa, pois pode ser implementada em medidores de reatividade em tempo real com cálculo de passo de tempo variando de 0.1 seg a 2 seg, sem limitação da forma de potência nuclear e mantendo a retomada imediata dos cálculos da reatividade, caso haja interrupção no reatímetro.

(6) Observa-se também que quanto maior o passo de tempo maior é o valor do erro. Isso se deve por causa das derivadas da potência nuclear presentes em ambas as equações, que quanto maior o tempo de aquisição, maior é o erro nas derivadas e, conseqüentemente, maior é o erro absoluto das reatividades. No entanto, os resultados apresentados pela nossa proposta é menos sensível ao momento de passe tempo, o que é possível adquirir dados com um intervalo de tempo maior, o que no ponto de vista prático é interessante, pois a aquisição de dados em uma usina acontece num intervalo de tempo de 1 a 2 segundos.

Resultados bem semelhantes foram publicados pela doutoranda e seus orientadores no artigo intitulado “Non-linear differential equation for reactivity monitoring”, (Noronha; Martinez; Gonçalves, 2023). Neste trabalho os autores apresentaram a EDONL, onde concluíram que esta tem demonstrado proporcionar um ganho significativo em relação aos métodos clássicos encontrados na literatura, pois torna desnecessário o uso do histórico da potência nuclear, permitindo a recuperação do cálculo da reatividade em qualquer instante de tempo sem perda de precisão após alguma interrupção inesperada de um reatímetro. Além disso, a formulação proposta favoreceu uma amostragem dos dados de potência nuclear com um intervalo de tempo mínimo de 1 segundo, possibilitando o cálculo da reatividade em tempo real.

Portanto, verifica-se que a formulação proposta neste trabalho representa adequadamente o comportamento esperado da reatividade.

6. Referências Bibliográficas

- ABDERRAHIM, A.; SOBOLEV, H.; MALAMBU, V. E. 2005. “Fuel design for the experimental ADS MYRRHA”, in: **Technical Meeting on use of LEU in ADS**, 10-12 October 2005, IAEA, Vienna, Austria, pp. 1–13.
- AKCASU, A.Z; LELLOUCHE, G. S; SHOTKIN, L. M. **Mathematical methods in Nuclear Reactor Dynamics**. New York, 1971.
- ANSARI, S. A. Development of on-line reactivity meter for nuclear reactors. **IEEE Transactions on Nuclear Science**, v. 38, n. 4, p. 946-952, 1991.

ANTOLIN, M. Q. **SIMULAÇÃO DE UM REATOR SUBCRÍTICO TIPO ADS VIA MONTE CARLO PARA VALIDAÇÃO DE CÁLCULO DA REATIVIDADE**. 2013. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

BAETEN, P. **Physics of nuclear reactors; Physique des Reacteurs Nucleaires**. 2006.

BELL, G.I; GLASSTONE, S. **Nuclear Reactor Theory**. 1ed. Van Nostrand Reinhold, 1970.

SUESCÚM, D.; MARTINEZ, A. S.; SILVA, F. C. 2007. Formulation for the Calculation of Reactivity Without Nuclear Power History. *Journal of Nuclear Science and Technology* 6 210-218.

DÍAZ, D. S. **Métodos para o Cálculo da Reatividade Usando Derivadas da Potência Nuclear e o Filtro FIR**. 2007. Tese de Doutorado. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO.

DÍAZ, D. S.; OSPINA, J. F. F.; SARASTY, J.A. R. Hamming method for solving the delayed neutron precursor concentration for reactivity calculation. *Annals of Nuclear Energy*, v. 42, p. 47-49, 2012.

DUDERSTADT, J.J.; HAMILTON, I.J., 1976. **Nuclear Reactor Analysis**, second ed. John Wiley & Sons Inc, New York.

FERNANDES, G. H. N.; BARBOSA, L. M. Q. **REACTORES ADS: CONCEITO BÁSICOS, PROJETOS E RELEVÂNCIA GLOBAL**. 2022.

FERREIRA, T. G. **ANÁLISE DO MÉTODO NUMÉRICO DE LAGRANGE APLICADO AO CÁLCULO DA CINÉTICA PONTUAL INVERSA**. 2021. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

GONÇALVES, A. C.; MARTINEZ, A. S; SILVA, F. C., 2006, "**Monitoração da Reatividade Através do Histórico da Potência Nuclear**". IX Encontro de Modelagem Computacional, 2006, Belo horizonte - MG.

HENRICE JÚNIOR, E. **Proposta de utilização do expoente de Hurst da detecção de transientes causados pela fonte externa de nêutrons em reatores ADS**. 2017.

HOSSAIN, M. K. *et al.* Understanding accelerator driven system (ADS) based green nuclear energy: A review. *World Journal of Nuclear Science and Technology*, v. 5, n. 04, p. 287, 2015.

JAHAN, N.; RASHID, M. M.; AHMED, F.; ISLAM, M. G. S; ALIUZZAMAN, M.; ISLAM, S. M. A. 2011. On Line Measurement of Reactivity Worth of TRIGA Mark-II Research Reactor Control Rods. **Journal of Modern Physics**, 2 1024-1029.

KADI, Y.; SARTORI, E. "The physics of innovative nuclear systems: From fundamental concepts to advanced power plants," **European Physical Journal Plus**, 2016.

KITANO, A.; ITAGAKI, M.; NARITA, M.. Memorial-index-based inverse kinetics method for continuous measurement of reactivity and source strength. **Journal of nuclear science and technology**, v. 37, n. 1, p. 53-59, 2000.

MALMIR, H.; VOSOUGHI, N. On-line reactivity calculation using Lagrange method. **Annals of Nuclear Energy**, v. 62, p. 463-467, 2013.

MOREIRA, J.M. L. *et al.* 1986. **Medidas de reatividade em tempo real-reatimetro**.

NORONHA, V. L.; MARTINEZ, A. S.; GONÇALVES, A. C. Non-linear differential equation for reactivity monitoring. **Annals of Nuclear Energy**, v. 192, p. 109960, 2023.

NUNES, A. L. A influência da aproximação referente à derivada da corrente de nêutrons nas equações da cinética pontual. **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, 2015.

OECD Nuclear Energy Agency. Accelerator-driven Systems (ADS) and Fast Reactors (FR) in Advanced Nuclear Fuel Cycles: A Comparative Study. NEA, 2002. Disponível em <https://www.oecd-nea.org/ndd/reports/2002/3109/nea3109annexF.pdf>. Acessado em 01 nov 2023.

PALMA, D.A.P., MARTINEZ, A.S., GONÇALVES, A.C., 2009. Analytical solution of point kinetics equations for linear reactivity variation during the start-up of a nuclear reactor. **Ann. Nucl. Energy** 36, 1469–1471.

REVOL, J. P.; KADI, Y. (2001). An accelerator-Driven system for the destruction of nuclear waste. **Progress in Nuclear Energy**, 38(1–2), 153–166. [https://doi.org/10.1016/S0149-1970\(00\)00100-1](https://doi.org/10.1016/S0149-1970(00)00100-1).

RUBBIA, C. *et al.* **Conceptual design of a fast neutron operated high power energy amplifier**. 1995.

SCAL, D. **Método Alternativo Para o Cálculo da Reatividade Sem o Uso da Condição de Criticalidade do Reator Antes da Partida**. 2010. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

SHIMAZU, Y.; NAKANO, Y.; GAKUHARI, K. 1994. Large Negative Reactivities by a Modified Digital Reactivity Meter. *Journal of Nuclear Science and Technology* 39 479-483. <https://doi.org/10.1080/18811248.1994.9735178>.

SHIMAZU, Y.; NAING, W. Some technical issues on continuous subcriticality monitoring by a digital reactivity meter during criticality approach. *Journal of nuclear science and technology*, v. 42, n. 6, p. 515-524, 2005.

SHIMAZU, Y. 2014. A simple procedure to estimate reactivity with good noise filtering characteristics. *Ann. Nucl. Energy* 73, 392–397.

SHIMAZU, Y.; TASHIRO, S.; TOJO, M. (2017). Theoretical comparison of performance using transfer functions for reactivity meters based on inverse kinetic method and simple feedback method. *Nucl. Sci. Technol.* 54: 481–489, <https://doi.org/10.1080/00223131.2017.1286270>.

STEFFEN, G. A portable digital reactivity meter for power reactors. *Kerntechnik*, v. 19, n. 7, p. 327-332, 1977.

SUESCUN, D.D., FLOREZ, J.F.O., RODRIGUEZ, J.A.S., 2012. Hamming method for solving the delayed neutron precursor concentration for reactivity calculation. *Ann. Nucl. Energy* 42 (2012), 47–49.

SUESCUN-DIAZ, D.; NARVAEZ-PAREDES, M.; LOZANO-PARADA, J. H. Calculation of nuclear reactivity using the generalised Adams-Bashforth-Moulton predictor corrector method. *Kerntechnik*, v. 81, n. 1, p. 86-93, 2016.

SUZUKI, E.; TSUNODA, T. A reactivity meter and its application. *Journal of Nuclear Science and Technology*, v. 1, n. 6, p. 210-218, 1964.

TAMURA, S. Signal fluctuation and neutron source in inverse kinetics method for reactivity measurement in the sub-critical domain. *Journal of nuclear science and technology*, v. 40, n. 3, p. 153-157, 2003.

ZAREI, M. (2021). A Kalman filtering of the Self-Powered Neutron Detector current to determine excess reactivity. *Radiat. Phys. Chem.* 18: 109602, <https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2021.109602>.

ZAREI, M. Na enhanced formalism for the inverse reactor kinetics problem. *Kerntrchnik*, v. 87, n. 1, p. 66-71, 2022, DOI: 10.1515/kern-2021-1008.

ZHANG, X.X.; SUN, G.Y.; GAO, J.; SONG, J.; YANG, Q. (2018). Preliminary analysis of reactivity reconstruction capability based on inverse kinetics method under different initial reactivity states

